M 30

# VEDELIKU STATSIONAARSE VOOLAMISE UURIMINE

## 1. Tööülesanne

Vedeliku statsionaarse voolamise uurimine. Bernoulli võrrandi kehtivuse kontrollimine.

## 2. Töövahendid

Katseseadeldis ja sekundkell.

## 3. Teoreetiline sissejuhatus

Vedelikke võib enamikel juhtudel lugeda absoluutselt mittekokkusurutavaiks ning vahel ka oletada, et vedelikukihtide vahel puudub hõõrdejõud. Sellist absoluutselt mittekokkusurutavat ja absoluutselt mitteviskoosset vedelikku nimetatakse ideaalseks. Ideaalne vedelik on reaalsete vedelike lihtsustatud mudeliks.

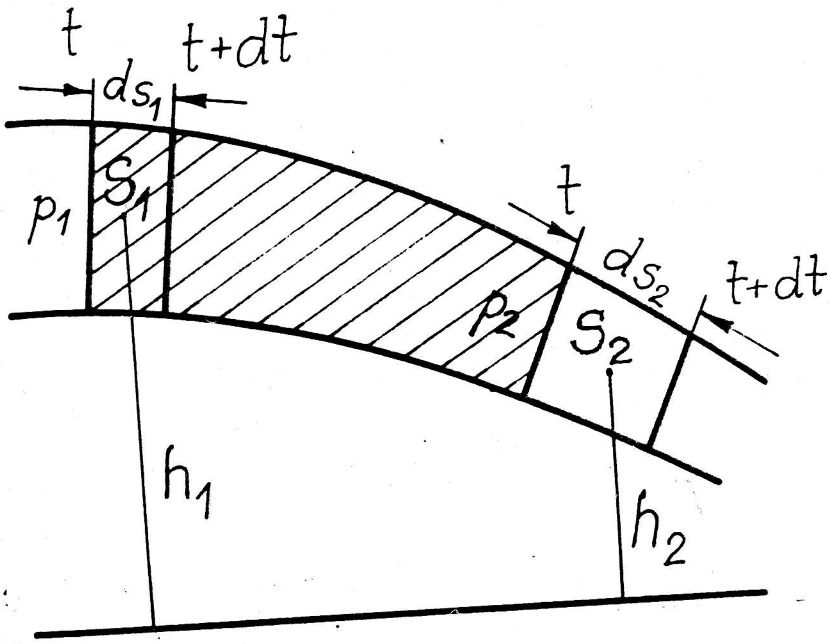
Osakeste kiiruste jaotust voolavas vedelikus iseloomustatakse voolujoontega. Voolujoonteks nimetatakse jooni, millele kiirus igas punktis on puutujaks.

Sageli kiiruste jaotus vedelikus ei muutu, olgugi et üksikute osakeste liikumise kiirused muutuvad, s.t. vedeliku kiirus igas punktis jääb ajas konstantseks. Sellist vedeliku voolamist nimetatakse statsionaarseks. Statsionaarse voolamise puhul voolujooned ja osakeste trajektoorid langevad kokku. Vedeliku osa, mis on ümbritsetud voolujoontega, nimetatakse voolutoruks.

Vaatleme ideaalse vedeliku statsionaarset voolamist muutuva ristlõikega voolutorus (joon. 1). Voolutoru viirutatud osa täitev vedelikuhulk ruumalaga dV paigutub aja dt jooksul edasi - ülemine ristlõige (pindala $S_1$) nihkub $ds_1$ võrra, alumine (pindala $S_2$) - $ds_2$ võrra. Mittekokkusurutavuse tõttu peab viirutatud osa dt jooksul sissevoolava vedeliku ruumala $S_1ds_1$ olema võrdne sealt sama aja jooksul välja voolava vedeliku ruumalaga $S_2ds_2$. Asendus $ds = vdt$ (v - voolu kiirus) viib pidevuse võrrandi nime all tuntud seoseni (kehtib suvalises voolutorus mistahes kahe ristlõike jaoks).

$$S_1v_1 = S_2v_2. \tag{1}$$

Vaatleme voolutoru viirutatud osas olevat vedelikku asuvana raskusjõu väljas, ümbritseva vedeliku kaudu sellele edasiantava rõhu jõudu loeme välisjõuks. Arvestades, et välisjõu poolt tehtud töö võrdub süsteemi mehhaanilise energia muuduga,




Joon. 1. Voolutoru raskusjõu väljas.

jõuame Bernoulli võrrandini:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \tag{2}$$

Siin $p_1$ ja $p_2$ on rõhk, $v_1$ ja $v_2$ vedeliku voolu kiirus voolutoru vastavalt ülemises ja alumises ristlõikes, $h_1$ ja $h_2$ on nende ristlõigete keskmised kõrgused potentsiaalse energia nullnivooks loetud tasemest (näit. maapinnast), $\rho$ – vedeliku tihedus. Bernoulli võrrandi võib kirjutada kujul

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}. \tag{3}$$

Siit on näha, et voolutoru suvalises ristlõikes jääb konstantseks kolme liikme summa, millest esimest nimetatakse staatiliseks rõhuks, teist dünaamiliseks rõhuks, kolmas väljendab staatilise rõhu muutust kõrguse muutumisel raskusväljas h võrra. Bernoulli võrrand on päris täpne lõpmatult peenikese voolutoru korral, kus kõrgus h on määratud üheselt ja rõhk p on täpselt ühesugune kogu ristlõikepinna ulatuses. Lõpmatult peenikest voolutoru võib aga vaadelda kui üht voolujoont. Seega võib Bernoulli võrrandis voolutoru asemel vaadelda voolujoont, indeksid võrrandis (2) tähistavad voolujoone erinevaid (suvalisi) punkte.

Horisontaalse voolutoru (voolujoone) korral ($h_1 = h_2$) Bernoulli võrrand lihtsustub:

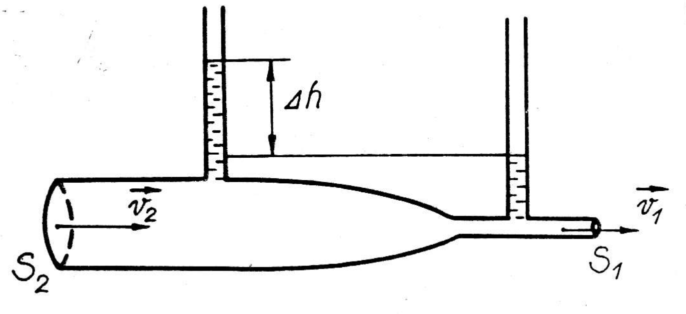
$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \qquad (4)$$

Kui laia anuma seinas või põhjas, sügavusel H vedeliku pinnast on väikese ristlõikepindalaga väljavooluava, siis Bernoulli võrrandi abil on lihtne arvutada ideaalse vedeliku kiirust väljavoolavas joas (Torricelli valem):

$$v_t = v = \sqrt{2\,gH}. \qquad (5)$$

Siin eeldatakse, et vedeliku voolu kiiruse laias anumas võib nulliks lugeda.

Vedeliku voolu kiiruse määramiseks võib ideaalse vedeliku mudeli lähenduses kasutada Venturi toru ja Pitot' toru. Venturi toru (joon. 2) on sujuva üleminekuosaga ühendatud kaks erineva ristlõikega silindrilist toru, millest kummastki tehtud külgväljavõtted on ühendatud staatiliste rõhkude vahet mõõtva seadmega – diferentsiaalmanomeetriga. Võrranditest (4)



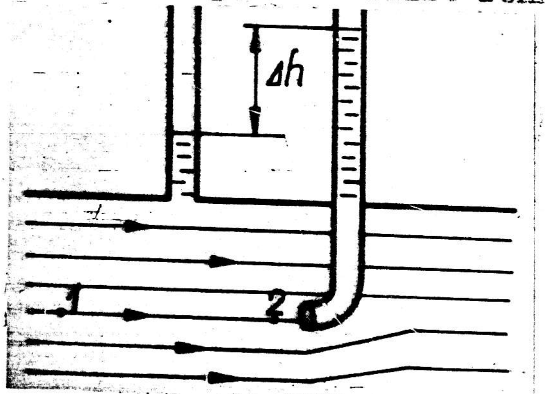

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$$

Joon. 2. Venturi toru.

ja (1) saab arvutada kiiruse, näiteks ristlõikes $S_2$:

$$v_v = v_2 = \sqrt{\frac{2\,(p_2-p_1)}{\rho\left(\frac{S_2^2}{S_1^2}-1\right)}}\,. \qquad (6)$$

Pitot' toru (joon. 3) kujutab ühtlase ristlõikega (tavaliselt silindrilisse) horisontaalsesse torru viidud kaht torukest, millest üks on painutatud ja paigutatud toru teljele avausega vedeliku voolu suunale vastu. Sellesse torru suunduval voolujoonel vedelik pidurdub, torukese suudmes on kiirus võrdne nulliga. Teine toru on sirge, ta on risti voolu suunaga ja mõõdab seega staatilist rõhku $p_1$.




$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$$

Joon. 3. Pitot' toru.

Bernoulli võrrand painutatud torukesse siseneva voolujoone jaoks omandab kuju

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}\,. \qquad (7)$$

Seega painutatud torukesega ühendatud manomeetri harus on rõhk $p_2$ voolavas vedelikus valitsevast staatilisest rõhust $p_1$ suurem dünaamilise rõhu $1/2\,\rho v_1^2$ võrra. Voolu kiiruse jaoks saame valemi:

$$v_p = v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2-p_1)}{\rho}}\,. \qquad (8)$$

Ideaalse vedeliku voolu kiirust saab arvutada ka ruumkiiruse $\phi$ (ajaühikus voolutoru ristlõiget läbiva vedeliku ruumala) kaudu:

$$v_\phi = \frac{\phi}{S} = \frac{V}{tS}\,. \qquad (9)$$

Siin V on aja t jooksul voolutoru ristlõiget läbinud vedeliku ruumala, S on ristlõikepindala.

Ideaalse vedeliku mudel (nagu igasugune reaalse füüsikalise nähtuse või objekti mudel) on ligikaudne, sisehõõrdumist ei saa mitte alati arvestamata jätta. Sisehõõrdumise tõttu muutub osa voolava vedeliku mehhaanilisest energiast pidevalt soojuseks. Ideaalse vedeliku mudel on kasutatav, kui vedelikuhulga vaadeldaval nihkel soojuseks muutuv osa energiast on väike, võrreldes nihke algul olemasoleva koguenergiaga. Vaatleme horisontaalse voolutoru lühikeses osas olevat vedelikku. Kui mingil hetkel kõrvaldada välisjõu mõju (s.t. staatiline rõhk vaadeldava (ühtlase ristlõikega) toruosa mõlemal otspinnal on sama), jätkab vedelik liikumist inertsi tõttu. Inertsiaalse liikumise algul olemasolnud kineetilise energia Wk ja toru raadiusega (voolukanali iseloomuliku joonmõõtmega) võrdsel nihkel sisehõõrdejõudude ületamisel soojuseks muundunud energia $\Delta$ Wk suhet nimetatakse Reynoldsi arvuks:

$$Re = \frac{W_k}{\Delta W_k} = \frac{\rho v r}{\eta} . \tag{10}$$

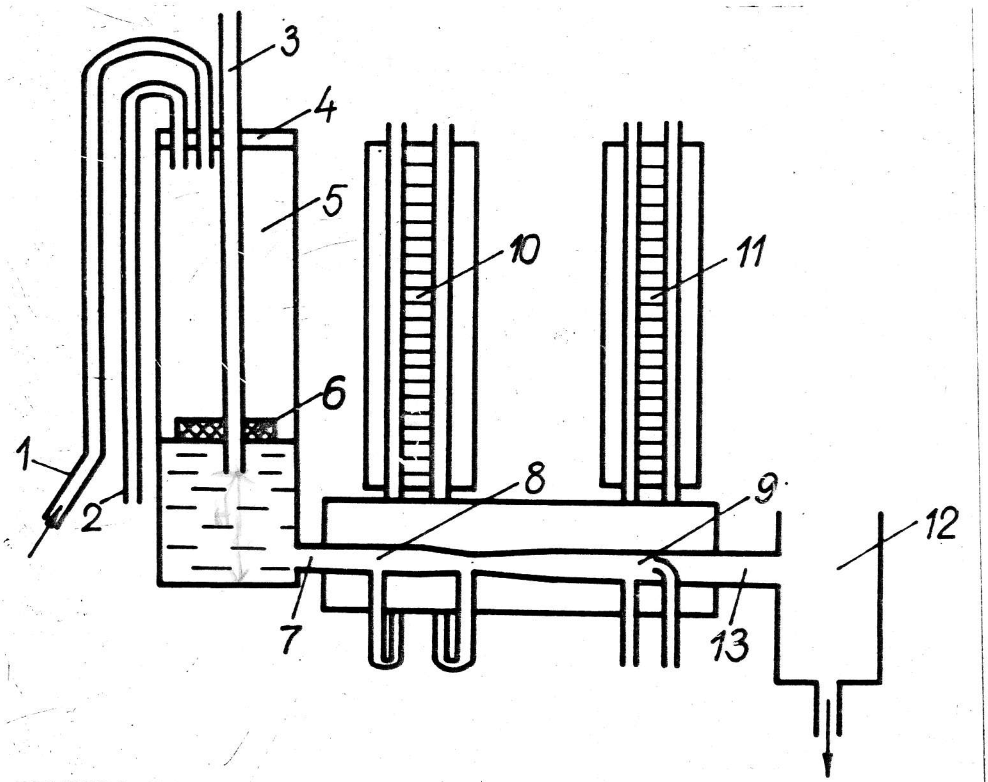
Siin v on voolu kiirus vaadeldavas ristlõikes, r on voolutoru raadius ja $\eta$ on vedeliku sisehõõrdetegur. Ideaalse vedeliku mudelit saab seega kasutada, kui $Re \gg 1$. Mida viskoossem vedelik, seda suurem peab olema toru raadius või(ja) voolu kiirus selleks, et see tingimus oleks täidetud ja Bernoulli võrrand kasutatav.

Ideaalse vedeliku osakeste kiirus kogu voolu ristlõikepinna ulatuses on ühesugune. Reaalse (viskoosse) vedeliku voolamisel torus on aga voolu kiirus toru teljel maksimaalne ja väheneb toru seina suunas, seinaga vahetult piirduv vedelikukiht on paigal. Selline kiiruste profiil kujuneb välja teatud toru pikkuse ulatuses alates kohast, kus vedelik anumast torru voolab. Seepärast on ideaalse vedeliku mudel edukalt kasutatav lühikestes voolutorudes (toru jääva ristlõikega osa pikkus ei ületa $\approx 10$ r), kui $Re \gg 1$.

Kui aga Re kasvab väga suureks, võib voolurežiim järsult muutuda. Tekib mittestatsionaarne turbulentne voolamine, mida iseloomustavad juhuslikud, mittestatsionaarsed keerised. Energiakadu nende keeriste tekitamiseks (keerised sumbuvad lõpuks sisehõõrde tõttu, energia läheb üle soojuseks) on palju suurem energiakaost rahulikul, laminaarsel voolamisel. Ideaalse vedeliku mudel pole turbulentsel voolamisel üldse kasutatav. Järelikult ei kehti ka Bernoulli võrrand. Silindrilises torus võib toimuda üleminek turbulentsele voolurežiimile, kui Re > 1100.

## 4. Katseseadme kirjeldus

Katseseade on kujutatud joonisel 4. Venturi toru 8 ja Pitot' toru 9 on ehitatud ühisesse orgaanilisest klaasist korpusesse, rõhumõõtetorukesed on ühendatud diferentsiaalmanomeetritega 10 ja 11. Vedelikmanomeetrites on töötavaks vedelikuks uuritav voolav vedelik (vesi) ise.




Joon. 4. Katseseade.

Püsiva voolukiiruse tagamiseks vajalik konstantne rõhk Venturi toru sisendis kasutatakse Mariotte'i anumat 5. Anum täidetakse veega veevärgist täitetoru 1 kaudu. Täitmise ajal peab õhutustoru 2 olema avatud, vee kokkuhoiuks väljavoolutoru 13 aga suletud. Kui nüüd sulgeda toru 2, jääb veepinna ja anuma kaane 4 vahele hermeetiliselt suletud ruum. Kui avada väljavoolutoru, hakkab veepind alanema, pinna kohal tekib alarõhk atmosfääri suhtes, mis kasvab, kuni rõhk vedeliku sees reguleerimistoru 3 otsa juures võrdsustub välisrõhuga. Siis surutakse õhk mullidena läbi reguleerimistoru vette; rõhk reguleerimistoru alumise otsa tasemel püsib välisrõhuga võrdne, kuni veetase on toru otsast kõrgemal. Reguleerimistoru otsa asend on muudetav. Ujuk 6 summutab veepinna kõikumist eralduvate mullide mõjul.

Anum 5 on gradueeritud mõõtanumaks, selle välisseinale on kantud mahuskaala, mille vähima jaotise väärtus on 21.

Väljavoolutoru 7 telje nivoo on samuti märgitud anuma välisseinale. Rõhk väljavoolutoru suudmes on määratud vedelikusamba kõrgusega H toru 3 otsa ja väljavoolutoru telje nivoode vahel. Kogumisanum 12 on ühendatud kanalisatsiooniga.

Seadme konstandid: voolutoru (Venturi toru jämedama silindrilise osa) läbimõõt (10,2 ± 0,1) mm, Venturi toru peenema osa läbimõõt (6,1 ± 0,1) mm; Mariotte'i anuma mahuskaala suvalise kahe kriipsu vahe maksimaalne suhteline viga on 0,8 %; manomeetrite millimeeterskaalade lubatud viga lugeda võrdseks III klassi metallmõõtlintide lubatud veaga.

## 5. Töö käik

5.1. Täidame Mariotte'i anuma, avanud enne toru õhutustoru 2 ja sulgenud toru väljundtoru 13 näpitsaga. Seame reguleerimistoru 3 kõige madalamasse seisu (H ≈ 100 mm), mõõdame kõrguse H (vt. lisaülesanne D).

5.2. Avame väljavoolutoru 13, sulgeme õhutustoru 2 sama näpitsaga. Vajaduse korral reguleerime manomeetrite skaalade ja torude kõrgusi, nii et kõikides torudes oleks veetase skaala piirides. Veendume, et manomeetritorudes ei ole õhumulle. Mõõdame vähemalt 41 vee väljavooluaja. Pärast kella käivitamist jälgime pidevalt manomeetrite näitusid, kirjutame üles mõlema manomeetri maksimaalse ja minimaalse näidu (tasemete vahe millimeetrites) selle aja jooksul. Näitude aritmeetiline keskmine on mõõtetulemus, pool näitude vahest aga mõõteviga.

5.3. Kordame katset 7–10 korda, muutes iga kord reguleerimistoru kõrgust H ca 50 mm võrra. Andmed koondame tabelisse. Tabelis reserveerime veerud ka valemite (9), (6) ja (8) järgi arvutatavate voolukiiruse väärtuste jaoks.

5.4. Arvutame kiiruste $v_{\phi}$, $v_v$ ja $v_p$ väärtused kõigi H väärtuste korral koos piirvigadega.

5.5. Joonestame graafikud $p_2 - p_1 = f(v_v^2)$ ja $p_2 - p_1 = f'(v_p^2)$. Piirvea ristide piires peavad nad olema sirged, see on Bernoulli võrrandi, seega ideaalse vedeliku mudeli kasutatavuse kontrolliks. Määrame sirgete tõusud graafikutelt, võrdleme neid valemitest (6) ja (8) arvutatutega.

5.6. Arvutame Re väärtused kõigi H väärtuste jaoks voolutoru silindrilises (jämedamas) osas. Hindame ideaalse vedeliku mudeli kasutatavust ka nende väärtuste järgi.

## 6. Lisaülesanded

### 6.1. Enne praktikumi

A. Esitada valemite (2), (5) ja (6) detailne tuletuskäik.

B. Milline on Re dimensioon?

C. Joonestada kiiruste profiil silindrilises torus ideaalse vedeliku voolamisel ja reaalse vedeliku laminaarsel voolamisel, samuti keskmise kiiruse profiil turbulentsel voolamisel.

D. Kuidas vältida parallaktilist viga reguleerimistoru otsa kõrguse H mõõtmisel? Toru asub Mariotte'i anuma teljel, s.t. kaugel mõõtevahendist (joonlauast), mille asetame anuma välisseinale.

E. Selgitada detailselt katsetulemuste graafikutelt sirge tõusu määramise protseduuri.

### 6.2. Pärast praktikumi

F. Kui $v_\phi$, $v_v$ ja $v_p$ väärtustes esineb süstemaatiline erinevus, selgitada seda vedeliku viskoossuse olemasolu (ideaalse vedeliku mudeli mittekehtivuse) alusel.

G. Joonestada graafik $v^2 = f''(H)$. Kui see tuleb sirge, näib leidvat kinnitust Torricelli valemi kehtivus. Määranud sirge tõusu, võib veenduda, et see langeb kokku Torricelli valemist arvutatuga. Kui aga arvutada voolu kiirus valemist (5), erineb see oluliselt kiirusest $v_\phi$. Milles on asi? Milline valemi (5) tuletamisel tehtud eeldus ei pea paika? Tuletada täpsustatud valem, mis arvestaks, et vedeliku vool küllalt pikas mõõtetorus ei ole käsitletav ideaalse vedeliku mudeli piires, laias anumas ja vahetult väljavoolutoru suudmes on aga ideaalse vedeliku mudel kasutatav.

## 7. Kirjandus

(vt. pöördel!)