

15

POISSONI KOEFITSIENDI JA TUIKLEMISE SAGEDUSE MÄÄRAMINE WILBERFORCE'I PENDLI ABIL

1. Tööulesanne

Tutvumine liitvõnkumistega. Poissoni koefitsiendi ja tuikleliste sageduste määramine.

2. Töövahendid

Katseseade seinale kirmitatud kronsteini küljes, sekundkell, nihik.

3. Teoreetiline sissejuhatus

On teada, et vedru otsa riputatud koormis võib vabalt võnkuda, kui ta alguses väikese jõu mõjul tasakaaluasendist välja viia ja siis lahti lasta. Sama keha võib sooritada ka pöördvõnkumist. Selleks tuleb tasakaaluasendis olevat keha natuke pöörata ümber vertikaaltelje ja siis lahti lasta. Kui keha võtab samaaegselt osa mõlemast võnkumisest, tekib liitvõnkumine - tuiklemine.

Vertikaalne võnkumine on põhjustatud vedru traadi ristlõike kihtide nihkedeformatsioonil tekkivatest elastsusjõududest, mida iseloomustab traadi materjali nihkemoodul G . Pöördvõnkumise taastav moment on põhjustatud traadi telje sihilise venituse (surve-) deformatsioonil tekkivatest elastsusjõududest, mida iseloomustab materjali elastsusmoodul E . Venituse (surve-) deformatsioonil tekib suhteline pikenemine (lühenemine) ϵ ja ristlõikepindala vähenemine (suurenemine) iseloomustav suhteline kokkuzurumine (venitus) ϵ_q ($\epsilon_q = \Delta d/d$, kus d on traadi diameeter pingestamata olekus ja Δd on pingestatud traadi diameetri muutus).

Suhet $\nu = -\epsilon_q/\epsilon$ nimetatakse Poissoni koefitsiendiks. Ta iseloomustab aine omadusi (nagu ka E ning G) ja ei sõltu aine valmistatud keha kujust. On ilmselge, et konstandid ν ja E peavad olema omavahel seotud. Et igal venitusel tekib alati ka veni-

tava pingega teravnurga all asetatud mõningane nihkumine, siis on tegelikult kõik kolm materjali elastseid omadusi iseloomustavat konstanti - ν , E ja G omavahel seotud. See seos on selline:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (1)$$

Kui vedru keerdude kaldenurk horisontaali suhtes on väike, siis vertikaalse võnkumise korral tavaliselt ei arvestata survedeformatsiooni, pöördevõnkumise korral aga nihkedeformatsiooni. Selline lihtsustus võimaldab kergesti määrata Poissoni koefitsiendi, mõõtes mõlemate võnkumiste perioodid.

Elastsete kehade teooriast on teada, et vedru jäikustegur k_1 vertikaalse võnkumise korral (survedeformatsiooni arvestamata) avaldub

$$k_1 = \frac{G d^4}{8 n D^3}, \quad (2)$$

kus d - vedru traadi diameeter,

D - vedru diameeter,

n - vedru keerdude arv,

G - nihkemoodul.

Jäikustegur pöördevõnkumise korral k_2 (nihkedeformatsiooni arvestamata) on

$$k_2 = \frac{E d^4}{64 n D}, \quad (3)$$

kus E on elastsusmoodul.

Kui pendel võngub ainult vertikaaltasandis ja keskkonna takistust tema liikumisele arvesse ei võeta, kirjeldab võnkumist diferentsiaalvõrrand

$$m \ddot{x} = -k_1 x, \quad (4)$$

kus m - koormise mass,

x - vertikaalnihe.

Pöördevõnkumise diferentsiaalvõrrand avaldub kujul

$$I \ddot{\varphi} = -k_2 \varphi, \quad (5)$$

kus I - koormise inertsimoment,

φ - pöördenurk.

Võrrandeist (4) ja (5) saame

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}}, \quad (6)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k_2}}, \quad (7)$$

kus T_1 - vertikaalse võnkumise periood,

T_2 - pöördivõnkumise periood.

Asendades valemisse (1) vastavad avasldised valemeist (2), (3), (6) ja (7), saame Poissoni koefitsiendi leidmiseks valemi

$$\nu = \frac{4J T_1^2}{D^2 m T_2^2} - 1. \quad (8)$$

Pendli pöör- ja vertikaalvõnkumise perioodid, seega ka sagedused (nn. normaalsagedused) ei ole omavahel võrdsed. Koormise massi muutmata on võimalik muuta tema inertsimomenti (muutes lisskehade asukohta), ühtlasi ka pöördivõnkumise perioodi. Kui ka pöör- ja vertikaalse võnkumise perioodid muutuvad omavahel suuruselt võrreldavaks, näemegi tuiklemist.

Tuiklemise sagedus

$$\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (9)$$

kus ω_2 - pöördivõnkumise sagedus (tuiklemise esinemise korral),

ω_1 - vertikaalse võnkumise sagedus.

Tuiklemise periood avaldub valemiga

$$\tau = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}. \quad (10)$$

4. Seadme kirjeldus

Vedru koos koormisega (Wilberforce'i pendel) on riputatud kronsteini külge (joon.1). Koormisel on joon.2 nähaolev kuju. Vertikaalsesse metallsilindrisse A on kinnitatud neli horisontaalset keermestatud varrast B. Raskused C on nihutatavad piki keermestatud vardaid ja nende asukoha muutmise saame muuta koormise inertsimomenti.

Koormise inertsimomendi sümmetriatelje OO suhtes saame kas

- 1) arvutada üksikute kehade inertsimomentide summana või
- 2) määrata katseliselt. Meetodi valik jääb üliõpilase hooleks.

1) Inertsimomendi arvutamine. Silindri A inertsimoment

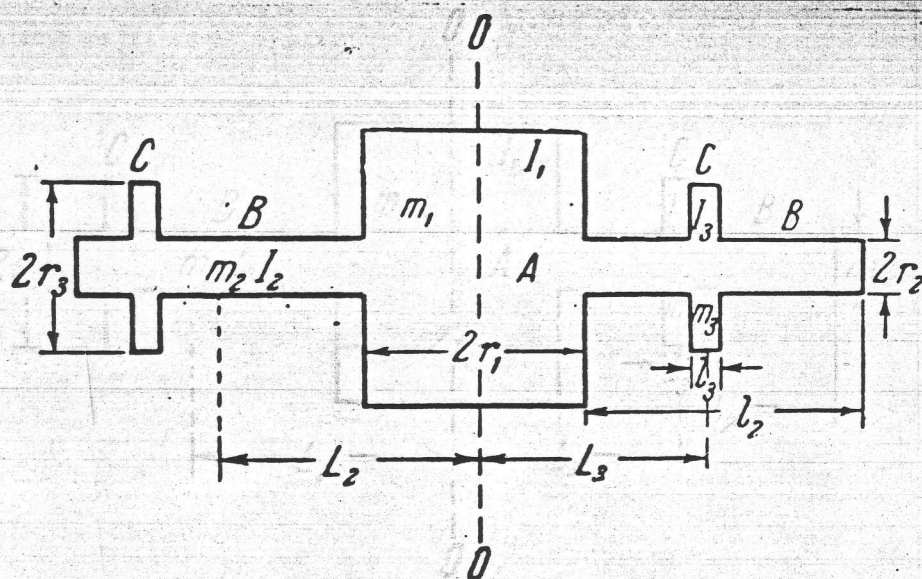
$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2,$$

kus m_1 - silindri A mass,

r_1 - silindri A raadius.



Joon. 1



Joon. 2

Varda B inertsimoment

$$4 I_2 = 4 m_2 \frac{L_2^2}{2} + \frac{4 m_2}{12} (l_2^2 + 3 r_2^2),$$

kus m_2 - varda B mass,

r_2 - varda B raadius,

l_2 - varda B pikkus,

L_2 - kaugus sümmeetriateljest varda B massikeskmenei.

Ketaste C inertsimoment

$$4 I_3 = 4 m_3 \left\{ \frac{L_3^2}{2} + \frac{1}{12} \left[l_3^2 + 3 (r_3^2 + r_2^2) \right] \right\},$$

kus m_3 - ketta C mass,

r_3 - ketta C raadius,

l_3 - ketta C paksus,

L_3 - ketta C raskuskeskme kaugus sümmeetriateljest.

Seega kogu keha inertsimoment

$$\begin{aligned} I &= I_1 + 4 I_2 + 4 I_3 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + 4 m_2 \left[\frac{L_2^2}{2} + \frac{1}{12} (l_2^2 + 3 r_2^2) \right] + \\ &+ \frac{1}{3} m_3 \left[l_3^2 + 3 (r_3^2 + r_2^2) \right] + 4 m_3 \frac{L_3^2}{2}. \quad (11) \end{aligned}$$

Selle avaldise kolm esimest liiget ei sõltu ketaste asendist ja need võime eelnevalt välja arvutada. Kauguse L_3 määramiseks nihikuga. Koormise kogumass

$$m = m_1 + 4 m_2 + 4 m_3. \quad (12)$$

2) Inertsimomendi katseline määramine torsioonpendli meetodil. Meetodi kirjelduse võib leida näit. mehhaanikapraktikumi juhendist T-8 [4, lk.84].

Vertikaalselt rippuva traadi otsa kinnitatakse vaheldumisi Wilberforce'i pendli keha ja (etalon-) metallsilinder, mõõdetakse mõlemal juhul pöördvõnkumise periood T ja T_s . Nagu teada, saab need perioodid arvutada valemist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (13)$$

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{I_s}{D}}. \quad (14)$$

Siin I on meie pendli otsitav inertsimoment. Etalonsilindri inertsimoment

$$I_s = \frac{1}{2} m_s R_s^2,$$

kus m_s - etalonsilindri mass,

R_s - etalonsilindri raadius.

Valemitest (13) ja (14) saame valemi I arvutamiseks:

$$I = \frac{T^2}{T_s^2} I_s. \quad (15)$$

5. Töö käik

5.1. Poissoni koefitsiendi määramine niisugusel juhul, kui vertikaalne võnkumine kutsub esile minimaalse pöördvõnkumise. Vastav olukord leitakse ketaste C asendi muutmisega eksperimentaalselt (siis on vertikaal- ja pöördvõnkumise perioodid võimalikult erinevad).

Viime koormise piki vertikaali mõne sentimeetri ulatuses tasakaaluasendist välja ja laseme lahti. Määrame vertikaalse võnkumise perioodi T_1 .

Muutmata süsteemi inertsimomenti, tekitame pöördvõnkumise ümber vertikaalse telje. Selleks pöörame tasakaaluasendis olevat koormist ettevaatlikult varda B otsast horisontaaltasapinnas ca 10° võrra ja laseme siis lahti. Seejuures jälgime hoolikalt, et samaaegselt ei tekiks vertikaalset võnkumist. Määrame pöördvõnkumise perioodi T_2 .

Kumbagi perioodi mõõdame vähemalt kolm korda ja keskmiste väärtuste järgi, kasutades valemeid (8) ja (9) ning (12) või (15). Leiame Poissoni koefitsiendi.

5.2. Muudame süsteemi inertsimomenti. Mida väiksemaks muutub sageduste erinevus, seda märgatavamaks muutub tuiklemine. Tuiklemise perioodi leidmiseks määrame kõigepealt väikese amplituudiga ($5-6^\circ$) pöördvõnkumise perioodi T_2 . Seejuures jälgime, et vertikaalne võnkumine puuduks. Inertsimomenti muutmata tekitame liitvõnkumise, kusjuures vertikaalse võnkumise energia olgu suurem pöördvõnkumise energiast. See nõue on täidetud, kui tuiklemisel pöördvõnkumise amplituud kahaneb nullini, vertikaalvõnkumise oma aga mitte.

Tuiklemise perioodi τ määrame varda B otsa kahe järjestikuse paigaloleku aja vahena. Mõõtmisi teeme vähemalt kolm korda. Teades T_1 , T_2 ja τ , kontrollime, kas valem (10) kehtib.

Ei ole soovitatav kasutada väga lähedasi T_1 ja T_2 väärtusi ega anda koormisele liiga suuri alghälbeid.

6. Lisaküsimusi

1. Miks on valemis $\nu = -\varepsilon_q / \varepsilon$ märk "miinus"?
2. Tuletada seos (1) nihkemooduli, elastsusmooduli ja Poissoni koefitsiendi vahel.
3. Tuletada võrrandist (4) valem (6).

7. Kirjandus

1. С. П. Стрелков. Механика. М., "Наука", 1965, стр. 266-272.
2. С. Э. Хайкин. Физические основы механики. М., Физматгиз, 1963, стр. 468-472, 649-662.
3. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под. ред. В. И. Ивероновой. М., "Наука", 1967, стр. 167-171.
4. Mehhaanikapraktikumi tööjuhendid. I. Koost. E. Tamm. Tartu, 1988.