

MA7

Jäiga keha inertsete omaduste uurimine pöördliikumisel

1. Tööülesanne

Juhendaja poolt valitud katsekeha tsentraalsete peainertsimomentide ja etteantud pöörlemistelje suhtes inertsimomendi katseline määramine; viimatinimetatud inertsimomendi arvutamine ja võrdlemine mõõdetuga; tsentraalse inertsiaalsoidi lõigete konstrueerimine koordinaattasandites.

2. Töövahendid

Katsestend pöördpendli, fotoelektrilise asendianduri ja keela-loenduriga, tehniline kaal, nihik.

3. Teoreetiline ülevaade

3.1. Jäiga keha inertsed omadused.

Kulgliikumisel määrab jäiga keha inertsiaals täielikult üks skalaarne suurus - mass m . Massi kaudu saab arvutada mistahes etteantud jõu poolt kehale antava kiirenduse:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}. \quad (1)$$

Liikumise hulk e . impulss arvutatakse kui kahe vastandi - inertsuse mõõdu m ja liikumise intensiivsust iseloomustava suuruse - kiiruse $\vec{v}$ korrutis:

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (2)$$

Pöördliikumisel on aga olukord tunduvalt keerulisem. Jäik keha võib pöörelda ümber lõpmatu hulga telgede. Kui rakendada kõikide nende telgede korral kehale sama (skalaarne) jõumoment telje suhtes M , siis omandab keha iga telje korral üldiselt erineva nurkkiirenduse β . Suvalise telje OO' korral:

$$\beta = \frac{1}{I_o} M_{oo'}. \quad (3)$$

Inertsii mõõt pöörliikumisel - inertsimoment I on iga telje korral erinev suurus. Seega võib sama keha inertsimomendil olla lõpmatu hulk erinevaid väärtusi. Impulsi analoogiks pöörliikumisel on impulsimoment. Impulsimoment suvalise telje OO' suhtes (skalaarne moment, teljel valitud punkti O suhtes arvutatud impulsimomendi vektori $\vec{L}_O$ projektsioon teljele) arvutatakse valemiga (2) analoogilisest valemist

$$L_{oo'} = I_o \omega, \quad (4)$$

kus ω on nurkkiiruse vektori moodul. Vektorite $\vec{L}_O$ ja $\vec{\omega}$ vahel kehtib samasugune seos

$$\vec{L}_O = I_o \vec{\omega}, \quad (5)$$

aga ainult teatud eriomadustega telgede korral, mida nimetatakse keha pea-inertsitelgedeks valitud punkti O suhtes. Selliseid telgi on keha suvalist punkti O läbivate telgede seas vähemalt kolm, need on omavahel risti. Üldjuhul on vektorid $\vec{L}_O$ ja $\vec{\omega}$ erineva suunaga. Sealjuures on vektor $\vec{L}_O$ keha suhtes paigal, välises taustsüsteemis aga pöörleb, säilitades konstantsena nurga pöörlemistelje suhtes, s.t. vektori sihi jälg moodustab pöörlemisel koonuse tipuga punktis O . Koonuse teljeks on pöörlemistelg.

Seome inertsiaalse taustsüsteemi kehas fikseeritud pöörlemisteljel asuva punktiga O , koordinaatteljed suunane suvaliselt. Moodustagu x -, y - ja z -telg pöörlemisteljega OO' nurgad vastavalt α , β ja γ . Valemi (4) põhjal on $L_{oo'} \sim \omega$, s.t.

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \sim \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

Kui säilitame pöörlemistelje sihi, s.t. $\vec{\omega}$ suuna, ja suurendame nurkkiirust n korda, siis suurenevad n korda ka vektori $\vec{\omega}$ kõik kolm komponenti, samuti aga ka vektori $\vec{L}_O$ kõik komponendid. See on võimalik vaid siis, kui vektorite $\vec{L}_O$ ja $\vec{\omega}$ komponentide vahel on lineaarne seos:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Seosekonstandid peavad olema inertsimomendi dimensiooniga. Osutub, et I_{xx} , I_{yy} ja I_{zz} on inertsimomendid vastavalt x -, y - ja z -telje suhtes, ülejäänutel selget füüsikalist sisu ei ole, neid nimetatakse tsentrifugaalinertsimomentideks (ka inertsikorrutisteks) ja nad avalduvad valemitega

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V x y \, dm; \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V x z \, dm; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V y z \, dm. \quad (7)$$

Kui valemite (6) kõik üheksa (erinevaid tegelikult kuus) konstanti on teada, siis osutub võimalikuks välja arvutada keha inertsimoment mistahes pöörlemistelje suhtes. Seega need üheksa skalaarset suurust määravad täielikult keha inertsed omadused pöördliikumisel. Kui kolme skalaarse suurusega (komponendiga) määratud suursi nimetame vektoriteks, siis selliseid üheksakomponendilisi suursi nimetatakse teist järku tensoriteks (skalaar on nullindat järku, vektor aga esimest järku tensor). Üleminekul mingisse uude taustsüsteemi (nihutatud alguspunkti ja (või) pööratud telgedega) teisenevad tensori kõik komponendid, tensor ise kui füüsikalise reaalsuse (keha inertsete omaduste) kirjeldus sellest ei muutu. (Inertsimoment suvalise telje suhtes ei sõltu sellest, missuguses taustsüsteemis seda mõõta.) Olukord on analoogiline vektori juhuga: ka vektori kõik kolm komponenti muutuvad üleminekul ühest taustsüsteemist teise, vektor ise aga ei muutu.

Teist järku tensorit esitatakse sageli selle komponentidest koostatud maatriksina:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

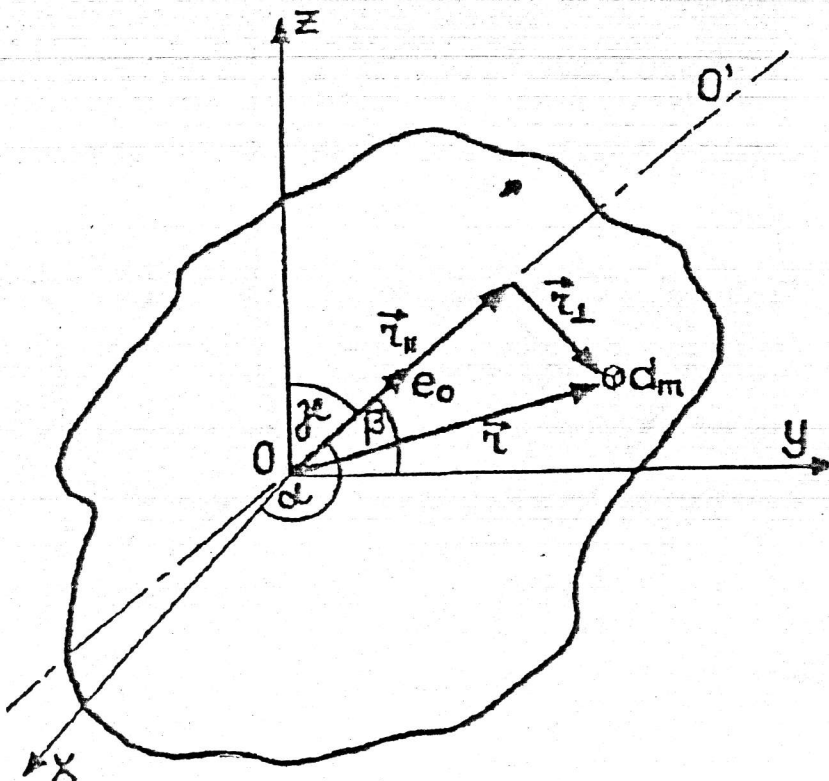
Kui suvalise punktiga O seotud taustsüsteemi koordinaatteljed suunata piki peainertstelgi O suhtes, siis saavad inertsitensori mittediagonaalelemendid (mittekokkulangevate indeksitega elemendid) nulliks - tensor on viidud diago-

naalkujule. Peainertsiteljed keha massikeskme suhtes kannavad tsentraalsete peainertsitelgede e. lihtsalt keha peatelgede (vaba pöörlemise telgede) nimetust. Kui nihutada taustsüsteemi alguspunkt massikeskmesse ja ühitada koordinaatteljed peatelgedega, siis diagonaalkujulise inertsitensori diagonaalelemendid on keha tsentraalsed peainertsimomendid.

Tuleb tähele panna, et kui keha pöörleb ümber ühe peainertsitelje, siis teised peainertsiteljed ühtuvad välise koordinaadistiku telgedega vaid üks kord iga täispöörde jooksul. Seega inertsitensori komponendid muutuvad ajas pidevalt, tensor omandab diagonaalkuju vaid kord iga täispöörde jooksul.

3.2. Inertsimoment meelevaldselt valitud telje suhtes.

Olgu meil suvalise kujuga keha, millel on nii kehas kui välises taustsüsteemis fikseeritud pöörlemistelg OO' (joon. 1). Seome välise taustsüsteemi telje punktiga O (ei pea tingimata asuma keha sees). Valinud teljel OO' positiivse suuna (näiteks keha pöörlemise nurkkiiruse vektori suund), saame selle suuna üheselt määrata nurkadega α , β ja γ pöörlemistelje ja koordinaattelgede vahel. Teljesuunalise ühikvektori projektsioonid telgedel



Joon.1. Massielemendi asukoha määramine.

võrduvad nende nurkade koosinustega (suunakoosinused):

$$\vec{e}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}. \quad (9)$$

Keha inertsimomendi I_o arvutamiseks telje OO' suhtes jagame keha massielementideks, suvalise elemendi asukoht on määratud raadiusvektoriga

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Keha inertsimoment I_o avaldub:

$$I_o = \int_V r_{\perp}^2 dm = \int_V (r^2 - r_{\parallel}^2) dm, \quad (10)$$

kus $\vec{r}_{\parallel}$ ja $\vec{r}_{\perp}$ on massielemendi raadiusvektori vastavalt teljesihiline ja teljega ristuv komponent. Arvestades, et

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_{\parallel}^2 = (\vec{r} \cdot \vec{e}_0)^2 = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \text{ saame:}$$

$$I_o = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (11)$$

Kahe indeksiga sümbolitega on siin tähistatud integraale:

$$I_{xx} \equiv I_x = \int_V (y^2 + z^2) dm; \quad I_{yy} \equiv I_y = \int_V (x^2 + z^2) dm; \quad I_{zz} \equiv I_z = \int_V (x^2 + y^2) dm; \\ I_{xy} = I_{yx} = \int_V xy dm; \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_V xz dm; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_V yz dm. \quad (12)$$

On lihtne näha, et esimesed kolm integraali on keha inertsimomendid koordinaattelgedele x , y ja z suhtes (kui O jääb ikka kinnispunktiks), teised kolm aga langevad kokku eespool valemitega (7) defineeritud inertsikorrutistega. Seega konkreetne arvutus tõestab, et inertsimoment suvalise pöörlemistelje suhtes,

mis läbib koordinaatide alguspunkti, avaldub tõesti selles koordinaadistikus avaldatud inertsitensori komponentide kaudu, nagu eespool väideti. Kui pöörlemistelg ei läbi koordinaatide alguspunkti, siis tuleb inertsimomendi arvutamisel lisaks kasutada veel Huygensi-Steineri valemit.

Kui välise taustsüsteemi koordinaatteljed ühitada keha peainertsitelgedega koordinaadistiku alguspunkti suhtes, siis inertsikorrutised saavad nulliks ja valem (11) lihtsustub:

$$I_o = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (13)$$

3.3. Inertsiiellipsoid.

Valemist (11) on näha, et keha inertsimoment mingi suvalise välise taustsüsteemi alguspunkti O läbiva pöörlemistelje suhtes sõltub selle telje sihist suunakoosinuste kaudu. Seda sõltuvust saab näitlikustada geomeetrilise interpretatsiooni abil. Kanname teljele OO' punktist O alates lõigu pikkusega

$$l' = I / \sqrt{I_o}. \quad (14)$$

Sellega me oleme läinud reaalsest füüsikalisest ruumist formaalsesse ruumi, kus lõigu pikkusi mõõdetakse ühikutes $m^{-1} \cdot kg^{-0.5}$ (rahvusvahelises ühikute süsteemis SI). Punkti O läbivatele kõikvõimalikele pöörlemistelgedele vastavate eelnimetatud lõikude otspunktid moodustavad selles formaalses ruumis mingi pinna. Tuletame selle pinna võrrandi. Avaldame telje OO' suunakoosinused lõigu l' projektsioonide x' , y' , z' kaudu koordinaattelgedel:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x'}{l'} = x' \sqrt{I_o}, \\ \cos \beta &= \frac{y'}{l'} = y' \sqrt{I_o}, \\ \cos \gamma &= \frac{z'}{l'} = z' \sqrt{I_o}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Asetanud need avaldised valemisse (11), saame:

$$I_{xx} x'^2 + I_{yy} y'^2 + I_{zz} z'^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = I \quad (16)$$

Võrrand (16) esitab teist järku pinda. Et reaalse keha inertsimoment ühegi pöörlemistelje suhtes ei saa olla null, siis valemist (14) järeldub, et meie pinna ükski punkt ei saa olla lõpmata kaugel koordinaatide algusest. Järelikult saab meie teist järku pind olla vaid ellipsoid (vt. lisaülesanne B). Seda pinda nimetatakse inertiellipsoidiks. See on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Ellipsoidi võib konstrueerida mistahes punkti jaoks. Keha massikeskmele vastavat inertiellipsoidi nimetatakse tsentraalseks. Kui koordinaatteljed ühtivad peainertsitelgedega taustsüsteemi alguspunkti suhtes, on ellipsoid sümmeetriline koordinaattelgede suhtes.

Inertiellipsoidi saab kasutada praktikas inertsimomendi arvutamiseks, kui pöörlemistelg on ette antud sirge võrranditega ruumis (s.t. kahe võrranditega esitatud tasandi lõikejoonena). Siis tuleb lahendada tasandite võrranditest ja võrrandist (16) koostatud süsteem, mis määrab inertiellipsoidi ja antud pöörlemistelje lõikepunkti. Selle punkti kohavektori ruut määrabki inertsimomendi pöördväärtuse.

4. Inertsimomendi katseline määramine pöördpendli abil

Pöörd- e. torsioonpendel on ümber fikseeritud telje pöörduda võiv süsteem, millel on püsiva tasakaalu asend ja milles sellest tasakaaluasendist väljapööramisel tekib tasakaaluasendisse tagasi pöörav taastav jõumoment nimetatud telje suhtes. Vaatleme siin lineaarset pöördpendlit, mille korral taastav jõumoment on võrdeline nurkhälbega tasakaaluasendist. Kui väliste jõumomentide summa eelnimetatud telje suhtes on null, hakkab süsteem pärast tasakaaluasendist väljaviimist ja vabastamist sooritama harmoonilist pöördvõnkumist, mille periood avaldub:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D}. \quad (17)$$

Siin I on süsteemi inertsimoment ja D taastavat momenti iseloomustav tegur, mida nimetatakse direktsioonimomendiks. (Reaalse pendli korral muidugi hõõrdejõudude moment ei ole null ja võnkumine on sumbu.)

Kui kinnitada torsioonpendlile keha, mille inertsimoment I kehas fikseeritud telje suhtes on tarvis määrata, nii et see telg ühtib pendli pöördteljega, siis liitsüsteemi võnkeperiood avaldub:

$$T_{o+x}^2 = 4\pi^2 \frac{I_o + I_x}{D}. \quad (18)$$

Siin I_o on tühja pöördpendli inertsimoment. Nii I_o kui D on üldjuhul tundmatud. Nende määramiseks tuleb teha kaks lisakatset: mõõta tühja pendli võnkeperiood T_o ja mingi tuntud inertsimomendiga I_s kehaga (näit. homogeenne silinder) koormatud pendli võnkeperiood. I_o ja D arvutatakse siis võrrandisüsteemist:

$$\left. \begin{aligned} T_o^2 &= 4\pi^2 \frac{I_o}{D}, \\ T_{o+s}^2 &= 4\pi^2 \frac{I_{o+s}}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Asendanud süsteemi lahendi (vt. lisäülesanne D) valemisse (18), saame:

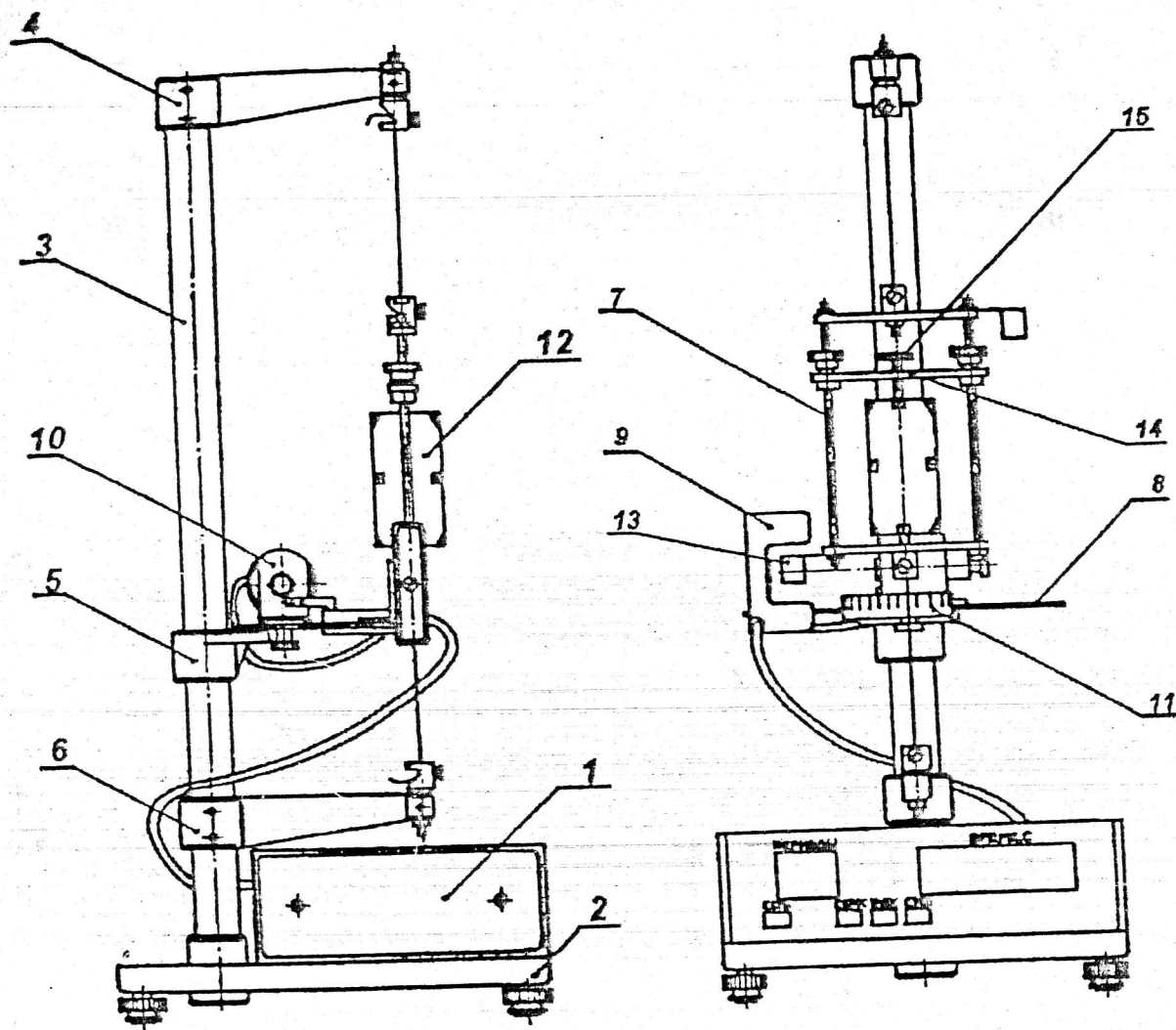
$$I_x = I_s \frac{T_{o+x}^2 - T_o^2}{T_{o+s}^2 - T_o^2}. \quad (20)$$

Kui pöördpendel ise või uuritav keha ei ole sümmeetrilised pendli ja sellele kinnitatud keha ühise pöördtelje suhtes, siis peab pöördtelg olema vertikaalne (vt. lisäülesanne F).

5. Katseseadme kirjeldus

Töös kasutatakse Poolas tööstuslikult toodetud katseseadet FPM-05. Seadme põhiosad on pöördpendel ja fotoandur ning elektrooniline kell-loendur võnkeperioodide arvu ja summaarse aja mõõtmiseks. Seade on kahes vaates kujutatud joonisel 2.

Pöördpendel kujutab endast jäika raami 7 nihutatava horisontaalse plaadiga 14. Plaadis oleva teravikuga kruvi 15 ja raami alumisel serval oleva kärni vahele kinnitatakse uuritav keha 12 (kehal on vastavad süvendid). Raam on riputatud kahe pingutatud terastraadi vahele, taastav moment tekib traatide vääändedeformatsioonil. Raam pingutatakse statiivil 3 olevate kronsteinide 4 ja 6 vahele. Kronsteinile 5 on kinnitatud fotoandur 9 aja ja võngete arvu mõõtmiseks, elektromagnet 10 süsteemi algasendi fikseerimiseks ja tõuketa vabastamiseks ning ringskaala 11 võnkeamplituudi hindamiseks. Magneti nihutamiseks terasplaadil 8 oleval ringpilus saab seada raami algamplituudi. Elektrooniline kell-loendur on monteeritud statiivi alusele 2 kinnitatud kasti 1.



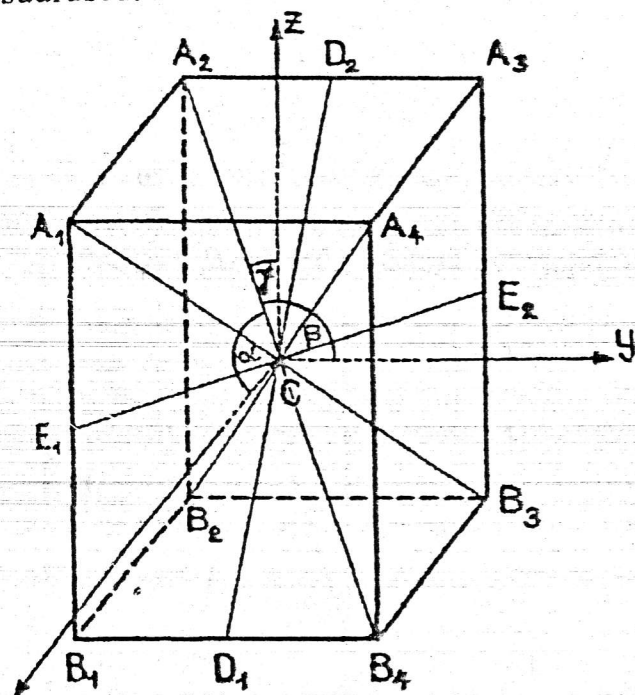
Joon. 2. Katseseade.

Kell-loenduri esipaneelil on neli surunupplüliti ja kaks numbertablood - võngete arvu ja aja inditseerimiseks. Võrgulüliti "CETb" lülitab sisse kell-loenduri ja elektromagneti. Tablood nullistatakse nupuga "СБРОС". Raami pöörates viiakse osuti 13 vastu elektromagneti südamikku; nii fikseeritakse raami algasend. Nupp "ПЫСК" lülitab magneti välja; osuti esimesel läbiminekul fotoelektrilisest andurist lülitatakse tööle kell-loendur. Et mõõta n võnkeperioodi summaarset aega, tuleb vajutada nupule "СТОП", kui perioodide loenduri tablood on seis $n-1$.

6. Töö kõik

6.1. Tööülesande (loe p. 1) täitmiseks määrame kõigepealt valemisse (20) kuuluvad suurused T_o ja T_{o+s} - tühja ja etalonsilindriga koormatud pöördpendli võnkeperioodid. Valime täisvõngete arvu selliselt, et perioodi määramise suhteline viga ei ületaks elektronkella sisemise kvartsgeneraatori lubatud suhtelist viga $2 \cdot 10^{-4}$.

6.2. Mõõdame etalonsilindri inertsimomendi I_s arvutamiseks vajalikud suurused.



Joon. 3. Katsekeha.

6.3. Mõõdame pöördpendli võnkeperioodi T_{o+x} juhendaja poolt antud katsekeha tsentraalsete peainertsimomentide ja juhendaja poolt valitud telje suhtes inertsimomendi määramiseks.

6.4. Mõõdame juhendaja poolt valitud telje suunanurkade α , β ja γ arvutamiseks vajalikud pikkused katsekehal. Katsekehad kujutavad risttahukaid (joon. 3); kehal olevad süvendid pöördpendli kinnitusraami kärnide jaoks võimaldavad valida pöörlemistelgedeks tsentraalseid peainertsitelgi, diagonaale ja sümmeetria-tasanditega lõigete diagonaale. Joonisel 3 on näidatud diagonaali

A_2B_4 suunanurgad taustsüsteemis, mille alguspunkt on massikeskmes C ja koordinaatteljed on ühitatud risttahuka peatelgedega.

6.5. Arvutame mõõdetud suurustest valemi (20) abil keha tsentraalsed peainertsimomendid ja inertsimomendi juhendaja poolt valitud telje suhtes.

6.6. Arvutame viimatinimetatud inertsimomendi ka valemist (13). Võrdleme tulemusi katsevigade piires.

6.7. Konstrueerime katsekeha tsentraalse inertsiiellipsoidi lõiked koordinaattasandites. (Valemis (16) on inertsikorrutised nüüd võrdsed nulliga.) Ühe neist lõigetest ehitame punkt-punkti meetodil võimalikult täpselt millimeeterpaberil, määrame sellelt inertsimomendi selle lõike diagonaali suhtes (näit. E_1E_2 või D_1D_2 joonisel 3).

6.8. Kirjutame välja inertsitensori keha peatelgedega ühitatud koordinaadistikus (valem (8)).

7. Lisaülesanded

7.1. Enne praktikumi.

- A. Defineerida punktmassi, punktmasside süsteemi ja jäiga keha inertsimoment suvalise telje suhtes.
- B. Milliseid teist järku pindu on olemas?
- C. Esitada valemi (11) detailne tuletuskäik.
- D. Lahendada võrrandisüsteem (19) ja tuletada valem (20).
- E. Valemi (20) analüüsi alusel leida kvalitatiivselt, milline peab olema suuruste I_O , I_S ja I_X vahekord, et I_X mõõtmistäpsus ei oleks mitte väga madal.
- F. Miks peab mittetelgsümmeetrilise pöördpendli ja/või katsekeha korral pendli pöördtelg olema vertikaalne?

8. Kirjandus

1. Tammet, H. Füüsika praktikum. Metroloogia. - Tln.; Valgus, 1971. - 240 lk.
2. Voolaid, H. Mõõtevigade hindamine füüsika praktikumis. - Tartu: TRÜ, 1986. - 55 lk.
3. Saveljev, I. Füüsika üldkursus. - Tln.: Valgus, 1978. - 1. - lk. 124-128.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. - М.: Наука, 1974 и поздн. - Т. 1. - С. 294-297.