FÜÜSIKA VARIATSIOONIPRINTSIIBID JA ILMAENNUSTUS

R. Rõõm,

Tartu Observatoorium, Tõravere,

room@aai.ee

Resümee

Atmosfääris toimuvate protsesside numbrilisel modelleerimisel on keskseks probleemiks liigsete vabadusastmete külmutamine. Paljulubavaks abivahendiks siin on füüsika variatsiooniprintsiipide rakendamine pidevale keskkonnale. Üks selline meetod on välja töötatud Tartu Observatooriumis. See on võimaldanud saada liigsete vabadusastmeteta liikumisvõrrandid, mis on täpsed ja lihtsad rakendustes. Praegu on need võrrandid evitamisel Põhjamaade ilmaennustusmudeli HIRLAM mittehüdrostaatilises versioonis.

1. Sissejuhatus

Et atmosfääril on makroskoopilisi vabadusastmeid 10^{15} korda rohkem kui võimaldab arvesse võtta praegune arvutustehnika, on tema dünaamika (sh. ilmaennustuse) numbrilisel modelleerimisel kogu aeg olnud keskne probleem "liigsete" vabadusastmete külmutamine. Vabadusastmete külmutamine käib kahel viisil: ilmutatult, võrrandite füüsikalise filtreerimise abil ja varjatult, numbrilise diskretiseerimise rakendamisega. Need kaks viisi on lahutamatult seotud ja esinevad numbrilistes skeemides alati korraga, aga füüsikaline filtreerimine on primaarne. Füüsikaline filtreerimine toimub võrrandite lihtsustamise kaudu ja tähendab kiiretest laineprotsessidest vabanemist ning aeglase dünaamika võimalikult moonutustevaba säilitamist. Füüsikalise filtreerimise primaarsus on ilmne sellest, et numbrilist diskretiseerimist ei saagi enne rakendada, kui dünaamika on eelnevalt füüsikaliste meetoditega silutud. Füüsikaline filtreerimine on olnud otseselt jälgitav numbrilise ilmaennustuse mudelite arengus: barotroopne geostroofiline mudel (oli kasutuses enne 1965. aastat) ja barokliinne kvaasigeostroofiline mudel (1960 – 1975) kasutasid võrrandeid, kus olid filtreeritud (eemaldatud) nii häälelained kui ka ujulained, Hilisemad, hüdrostaatilistel nn. algvõrrandeil (primitive equations) rajanevad mudelid (kasutusel alates 1970-ndatest aastatest) ellimineerivad häälelainetega seotud protsessid, kuid jätavad alles ujulained. Seoses numbriliste dünaamika ja ilmaennusmudelite lahutussvõime kasvuga on aktualiseerunud üleminek mittehüdrostaatilistele mudelitele. Esimesi mittehüdrostaatilisi integreerimisskeeme on ilmaennustuses abivahendina rakendatud alates 1985. aastast, kuid tegelikult on hüdrostaatiliselt mittehüdrostaatilisele mudelile üleminek ilmaennustuses alles algamas. Asi on selles, et mittehüdrostaatiliste effektide arvestamine muutub aktuaalseks alates võrgusammust 10 km või väiksem, enamikul kasutuselolevatest mudelitest on see tunduvalt suurem. Nii on Euroopa Ilmakeskuse ECMWF globaalmudeli võrgusamm 66 km, Põhjamaade lokaalala mudeli HIRLAM samm aga on 22 km. Kuid mudelid sammuga 10 ja 5 km on mitmel pool (sealhulgas Tõraveres) juba evitamisel.

Mittehüdrostaatiliste effektide arvestamine muudab liigsete vabadusastmete külmutamise ehk füüsikalise filtreerimise probleemi sootuks keerulisemaks. See on ka mõistetav: mida rohkem erinevaid effekte soovitakse arvestada ja füüsikalisi toimemehhanisme alles jätta, seda keerulisem on vabaneda üleliigsetest. Keerulisem mudel esitab rohkem vastakaid nõudmisi, millede üheaegne rahuldamine on komplitseeritum, kui mitte sootuks võimatu.

Küllalt üldise meetodi filtreeritud võrrandite saamiseks annab füüsika variatsiooniprintsiipide rakendamine. Meetodi olu on selles, et approksimeeritakse sobivalt Lagrange'i tihedusfunktsiooni, mille tulemusel saadakse variatsiooniprobleemi ekstreemumitingimusena vajalike omadustega dünaamikavõrrandid. Meetodi eeliseks on võimalus kontrollida lähendamise käigus lagranžiaani sümmeetriaid ja koos sellega kontrollida lähendatavate võrrandite jäävusseadusi. See võimaldab juba eos vältida empiiriliste filtreerimisskeemide peamist puudust ja kitsakohta: kuidas saavutada, et lihtsustatud mudel haaraks olulised jäävusseadused. Jäävuste olemasolu on iga pideva keskkonna mudeli esmane kvaliteedikriteerium. Seega on siin tegu meetodiga, mis garanteerib mudeli kvaliteedi *a priori*. Keerulisemaks ülesandeks on variatsioonitehnika rakendamisel aga õige lähenduse leidmine. Kuna variatsiooniprintsiipidest ei tulene aprioorseid kriteeriume lähendmudeli headuse hindamiseks, on tarvis rakendada täiendavat testimist.

Käesolevas töös anname ülevaate Lagrange'i vähimmõju printsiibi rakendamisest filtreeritud mittehüdrostaatilis(t)e dünaamika(te) saamiseks rõhukoordinaatides. Seda temaatikat on Tartu Observatooriumi dünaamilise meteoroloogia töörühmas arendatud viimased viis aastat ja teoreetilised tulemused hakkavad saama rakenduskõlblikeks. Seega on õige aeg tutvustada laiemat füüsikaüldsust tehtavaga.

Milleks on tarvilik niisugune eksootika nagu rõhukoordinaadid? Rõhukoordinaadistik ehk lühemalt p–ruum, see on koordinaatsüsteem, kus kõrvuti horisontaalkoordinaatidega x, y, on (tavapärase kõrguse z asemel) vertikaalkoordinaadiks rõhk p antud ruumipunktis. Rõhukoordinaadid on atmosfääridünaamikas laialt kasutusel rea praktiliste eeliste tõttu, mis neil kvaasihüdrostaatiliste protsesside kirjeldamisel on. Kogu suuremastaabiliste atmosfääriprotsesside teooria on kirja pandud rõhukoordinaate kasutades ja ka enamus rakenduslikke ilmaennustuse ja kliimamodelleerimise numbrilisi arvutusprogramme on realiseeritud p–ruumis. Seda silmas pidades on hästi kaval ja perspektiivikas formuleerida ka mittehüdrostaatilised mudelid p–ruumi terminites. Et sellisel ülesandepüstitusel on tegu küllalt abstraktsete konstruktsioonidega, võib tekkida ja tekibki hulgaliselt tõlgitsemisprobleeme. Siin on suur abi variatsiooniprintsiipide kasutamisest. See on ka üks lisaargumente variatsiooniprintsiipide rakendamisele pideva keskkonna füüsikas.

Lagrange'i vähimmõju printsiibi (VMP) formuleeris pidevale keskkonnale esmalt Glebsch (1857, 1859). Olulit on tegu klassikalise mehhaanika vähimmõju printsiibi kohandamisega pidevale keskkonnale. Mõningate täiendustega, lõpetatud kujul on see kõige ülevaatlikumalt ja ilusamini kirjas Serrinil (1959). Sealt edasi algab uus etapp pideva keskkonna variatsiooniprintsiipide arengus. See on seotud Arnol'di nimega, kes 1965 aastal (Arnol'd 1965, 1969) formuleeris simpleksdünaamika formalismis ideaalse vedeliku Hamiltoni printsiibi. Kui klassikaline Glebsh–Serrini käsitlus on mehaanikaline, siis Arnol'di formulatsioon on lähedasem väljateoreetilisele lähenemisele. Ilusa ja põhjaliku ülevaate Arnold'i ideedel rajanevast käsitlusest on teinud Shepherd (1990). Käesolevas ülevaates kasutame klassikalist, Glebsh–Serrini VMP formuleeringut. Atmosfääridünaamikas on variatsiooniprintsiibid suhteliselt hiline "avastus" ja ilmunud tööd võib üles lugeda kahe käe sõrmedel (Salmon 1983, 1988, Salmon ja Smith 1994, Roulstone ja Brice 1995, Rõõm ja Ülejõe 1996, Rõõm 1997, 1998).

2. Vähimmõju printsiip pideva keskkonna mehhaanikas

Et lihtsustada hilisemat VMP käsitlust p–ruumis, formuleerin algatuseks Serrinit (1959) järgides klassikalise pideva keskkonna mehhaanika VMP tavalises geomeetrias.

Vaadeldav pidev keskkond (gaas, meie juhul atmosfäär) on lokaliseeritud ruumipiirkonnas V piirpinnaga Σ. Keskkonna arengut vaadeldakse ajalõigul $T = [t_0,\ t_1]$. Käsitluse kompaktsuse huvides on otstarbekas kasutusele võtta funktsiooniruum C_0^1, mille objektideks on suvalised funktsioonid $\varphi(\mathbf{x},\ t)$, $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3) \in V$, $t \in T$, mis on (vähemalt üks kord) differentseeruvad kõigi argumentide x^α, t järgi, muutuvad nulliks piirpinnal Σ iga t korral ja on nullid ka alg- ja lõpphetketel t_0 ja t_1 kõikjal V–s. Kui tähistada piirkonnas $V \otimes T$ pidevate funktsioonide ruum $C[V \otimes T]$, siis on C_0^1 definitsioon kompaktselt kirja pandav kujul

$$\varphi(\mathbf{x},\ t)\ \in\ C_0^1\ :\ \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\ \in\ C[V\otimes T]\ ;\varphi|_\Sigma =\ 0,\ \varphi|_{t_0}\ =\ 0,\ \varphi|_{t_1}\ =\ 0\right\}\ . \quad (1)$$

Ruum C_0^1 on edaspidi oluline konstruktsioon, kuna selle ruumi punktideks (elementideks) on lubatavate virtuaalnihete väljad. Virtuaalsete nihete väli on Serrinil põhimõiste. Pideva keskkonna punkti $\mathbf{x}$ virtuaalne nihe $\delta\mathbf{x}$ hetkel on t selle punkti suvaline väike nihe ruumis, $\mathbf{x}\ \to \mathbf{x}\ +\ \delta\mathbf{x}$. Keskkonna punktide virtuaalsete nihete kogum moodustab virtuaalsete nihete välja $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x},\ t)$, mis eeldatakse alati kuuluvat ruumi C_0^1:

$$\delta\mathbf{x}(\mathbf{x},\ t)\ =\ \{\delta x^1(\mathbf{x},\ t)\ ,\delta x^2(\mathbf{x},\ t)\ ,\delta x^3(\mathbf{x},\ t)\}\ \in\ C_0^1\ .$$

Igas muus aspektis on virtuaalnihete väli suvaline.

Virtuaalnihked on materiaalsed, nad haaravad kaasa keskkonna mateeriapunktid. See avaldub järmiselt.

(1) Kui keskkond on liikumises ja mateeriaosakesed liiguvad mööda kindlaid trajektoore*, siis põhjustavad virtuaalnihked trajektooride deformatsioonid ja seetõttu ka

* See on ainus koht, kus Serrin vajab trajektoori mõistet.

keskkonna kiirusvälja $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\ t)$ muutuse, mis on leitav seosest

$$\delta\dot{\mathbf{x}} \ = \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{x}\ . \tag{2}$$

(2) Virtuaalnihetel säilib keskkonna materiaalne pidevus. Suvalise, infinitesimaalse, ruumalaga dV ja massiga dm aineosakese korral tähedab see massi jäävust virtuaalnihete väljas

$$\delta(dm) \ \ = \delta\left(\rho dV\right) \ = \ 0\ . \tag{3}$$

Kuna elementaarruumala virtuaalmuut on

$$\delta(dV) \ = \ dV \ \nabla\cdot\delta\mathbf{x}\ ,$$

järeldub

$$\delta\rho \ = \ -\ \rho\nabla\cdot\delta\mathbf{x}\ . \tag{4a}$$

See on pidevusvõrrand virtuaalnihetel, mis tegelikul liikumisel annab võrrandi

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \ + \ \rho\nabla\cdot\dot{\mathbf{x}} \ = \ 0\ . \tag{4b}$$

Lisaks eeldatakse, et

(3) keskkonna deformatsioonid toimuvad isentroopiliselt:

$$\delta s \ = \ 0\ , \tag{5a}$$

kuigi tegelikul liikumisel võib entroopiatihedus keskkonnas s muutuda entroopiaallikate A_s toimel:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \ = \ Q/\theta \ \equiv \ A_s\ , \tag{5b}$$

On oluline silmas pidada, et Glebsch–Serrini käsitluses ei ole pidevusvõrrand (4b) ja entroopiavõrrand (5b) variatsiooniprobleemi ekstreemumitingimuse resultaat (s.t., nad ei ole Lagrange'i võrrandid), vaid moodustavad täiendavad lisatingimused, mida varieerimisel tuleb arvestada (vormis (4a) ja (5a)), et saada õiged pideva keskkonna mehhaanika võrrandid.

Nüüd on vajalik eeltöö tehtud, et formuleerida VMP: Keskkonna mehhaaniline liikumine toimub nii, et mõju S on statsionaarne suvalistel virtuaalnihetel:

$$\delta S \;=\; 0 \qquad \forall \qquad \delta(\mathbf{x},\ t) \;\in\; C_0^1 \ . \tag{6}$$

Siin mõju S on

$$S \;=\; \int_T dt \int_V dV \rho \; l(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ \rho,\ s) \ ,$$

kus Lagrange'i funktsioon l on vahe kineetilise energia tiheduse ja nn. staatilise potentsiaali (= gravitatsioonipotentsiaali ja siseenergia tiheduse summa) vahel:

$$l(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \rho, s) \;=\; e_k(\dot{\mathbf{x}}) \;-\; e_p(\mathbf{x}) \;-\; e_s(\rho, s) \;=$$

$$\dot{\mathbf{x}}^2/2 \;-\; g \cdot z \;-\; e_s(\rho, s) \ , \tag{7}$$

kusjuures siseenergia tihedust e_s vaadeldakse olekufunktsioonina tihedusest ja entroopiast.

Kui S varieerimine tegelikult läbi viia ja arvestada seejuures tingimusi (3), (4a), (5a), on tulemuseks Lagrange'i võrrandid

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} \;=\; \rho \, \frac{\partial l}{\partial x^i} \;-\; \rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial l}{\partial \dot{x}^i} \;+\; \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho^2 \frac{\partial l}{\partial \rho} \right) \;=\; 0 \ , \quad i \;=\; 1, 2, 3,$$

mis l ilmutatud kuju (7) ning termodünaamilise seose

$$\frac{\partial e_s}{\partial \rho} \;=\; \frac{p}{\rho^2}$$

kasutamisel annavad kolm mehhaanikavõrrandit pidevale keskkonnale

$$\rho \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\rho g \delta^{i3} \;-\; \frac{\partial p}{\partial x^i} \ .$$

Pideva keskkonna dünaamika suletud süsteemi saamiseks on tarvis neile võrrandeile lisada pidevusvõrrand (4b) ja entroopiavõrrand (5b).

3. Vähimmõju printsiip p–ruumis.

VMP formuleerimine rõhukoordinaatesituses ei ole lihtviisiline Serrini formalismi projekteerimine tavalistest koordinaatidest rõhukoordinaatesitusse, kuna osutub, et rõhuruumis on nii sõltumatute virtuaalnihete kui ka varieerimisel saadavate võrrandite arv ühe võrra suurem kui tavaruumis formuleerituna, s.o. – neli. Korrektse tulemuse saamiseks on seetõttu tarvilik kas eelnevalt teada õigeid võrrandeid või postuleerida vähimmõju printsiip nii, et see toob õigetele võrranditele. Kuna üldised gasodünaamika võrrandid rõhukoordinaatides on teada (Rõõm 1989,1990), siis VMP tuletamine neile toimuski nii, et katseliselt formuleeriti VMP kujul, kus tulemuseks olid soovitavad, teadaolevad võrrandid. Siin talitan aga vastupidi, postuleerides p–ruumi VMP ja tuletades sellest liikumisvõrrandid. Esiteks on niisugune lähenemine kompaktsem, teiseks võimaldab see kontsentreerida tähelepanu käesoleva ülevaate aspektis olulisematele momentidele.

Kui rõhk p on kõrguse $x^3 = z$ momotoonne funktsioon, ja Maa atmosfääris ta on seda (isegi mittehüdrostaatilisel liikumisel), siis on alati võimalik kasutada koordinaatidena (x^1, x^2, x^3) asemel kolmikut $(x^1, x^2, p) = (\mathbf{x}, p)$ ($\mathbf{x}$ on horisontaalne kohavektor). Uutes koordinaatides on keskkonnapunkti kõrgus $z = z(\mathbf{x},\ p,\ t)$ sõltuv väli, temaga samaväärne on kasutada geoptotentsiaali välja $\Phi(\mathbf{x},\ p,\ t) = gz(\mathbf{x},\ p,\ t)$. Ruumalaelement uutes koordinaatides on $dV_p = dx^1 dx^2 dp$ ja sellele vastab elementaarmass $dm = n dV_p/g$, kus n on (mugavuse mõttes) dimensioonituna valitud ainetihedus p–ruumis.

Mõjuintegraali defineerin järgmiselt:

$$S = \int_T dt \int_{V_p} dV_p n\ l(z,\ \dot{z},\ \dot{\mathbf{x}},\ p,\ n,\ s)\ , \tag{8}$$

kus Lagrange'i funktsioon l on

$$l(z,\ \dot{z},\ \dot{\mathbf{x}},\ p,\ n,\ s) = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} - h(p,s) - gz \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ . \tag{9}$$

Siin $\dot{\mathbf{x}}$ on kahemõõtmeline kiirusväli, $\dot{z}$ on vertikaalkiirus, $h(p,s)$ on entalpiatihedus, mis on teatavasti karakteristlik funktsioon rõhust ja entroopiatihedusest, kusjuures

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{1}{\rho}\ , \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \Theta\ ,$$

kus Θ on temperatuur.

Variatsiooniprintsiip sellele mõjule on analoogiline (6)–ga, selle vahega et virtuaalnihete väli on neljadimensionaalne, sisaldades lisaks koordinaatide variatsioonidele $\delta\mathbf{x}$, δp ka kõrgusvälja variatsiooni δz:

$$\delta S \;=\; 0 \qquad \forall \quad \{\delta\mathbf{x}(\mathbf{x},\; p,\; t),\; \delta p(\mathbf{x},\; p,\; t),\; \delta z(\mathbf{x},\; p,\; t)\} \;\in\; C_0^1\;. \tag{10}$$

Seejuures on virtuaalnihete funktsiooniruum C_0^1 analoogiline varasemaga (1) selle vahega, et V on asendunud p–ruumi piirkonnaga V_p ja osatuletis z järgi on asendunud osatuletisega p järgi:

$$\varphi(\mathbf{x},\; t) \;\in\; C_0^1 \;:\; \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial p}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \;\in\; C[V_p\otimes T]\;; \varphi|_\Sigma = 0,\; \varphi|_{t_0} = 0,\; \varphi|_{t_1} = 0\right\}\;.$$

Varieerimisel on tarvis, analoogiliselt tavaruumi juhuga, arvesse võtta

(1) trajektooride deformeerumist virtuaalnihetel nii p– kui tavaruumis:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{x}\;, \quad \delta\dot{z} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta z\;, \quad \delta\dot{p} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta p\;,$$

(2) Aine jäävust ja keskkonna pidevust

$$\delta\,(dV_p\cdot n) \;=\; 0\;,$$

$$\delta n \;+\; n\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\delta\mathbf{x} \;+\; \frac{\partial\delta p}{\partial p}\right) \;=\; 0\;,$$

kus $\partial/\partial\mathbf{x} = (\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2)$ on kahemõõtmeline gradient isobaarpinnal,

(3) entroopia säilivust

$$\delta s \;=\; 0\;.$$

Tehtud eeldustel on S ekstreemumiks (statsionaarsustingimuseks) neli Lagrange'i võrrandit

$$\frac{\partial l}{\partial z} \;-\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial\dot{z}} \;=\; 0\;, \tag{11a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}n^2\frac{\partial l}{\partial n} \;-\; n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial\dot{\mathbf{x}}} \;=\; 0\;, \tag{11b}$$

$$n\frac{\partial l}{\partial p} \;+\; \frac{\partial}{\partial p}n^2\frac{\partial l}{\partial n} \;=\; 0\;. \tag{11c}$$

Nad on täiesti üldised niikaua kuni lagranžiaan $l(z,\dot{z},\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},p,n,s)$ ei ole konkretiseeritud. Valides lagranžiaani kujul (9), saame p ruumi mehhaanikavõrrandid

$$n\,\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \;=\; g(1\;-\;n)\;, \tag{12a}$$

$$n\,\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\,g\frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}}\;, \tag{12b}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} \;=\; -\frac{n}{g}\;\frac{\partial h(p,s)}{\partial p}\;, \tag{12c}$$

Suletud mudeli saamiseks on vaja see süsteem täiendada pidevus- ja entroopiavõrrandiga:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \;+\; n\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} \;+\; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right) \;=\; 0\;, \tag{12d}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \;=\; A_s\;. \tag{12e}$$

Saadud võrrandite puhul on vaja rõhutada järgnevaid asjaolusid.

(i) Neljas Lagrange'i võrrand (11c), millele vastab ilmutatud kujul võrrand (12c), ei ole, erinevalt kolmest esimesest, täiendav liikumisvõrrand vaid seos mis defineerib ülemineku z–ruumist p–ruumi ja vastupidi ning annab seega eeskirja p–ruumi meetrika sissetoomiseks. Me saame (12c) kirjutada kujul,

$$\frac{\partial z}{\partial p} \;=\; -\frac{n}{g\rho}\;,$$

kust järeldub, et üleminek p–ruumi on korrektne niikaua, kuni mõlemad tihedused ρ ja n on positiivsed, nullist erinevad ja lõplikud.

(ii) Lõpmata väikestel vertikaalkiirendustel, kui $d^2z/dt^2 \;\to\; 0$, saame (12a) kohaselt $n \to 1$. Selle tulemusel läheb pidevusvõrrand (12d) üle (p–ruumi (!)) kokkusurumatustingimuseks

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{x}} \;+\; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \;=\; 0\;, \tag{12d'}$$

ja võrrand (12c) hüdrostaatikavõrrandiks

$$\frac{\partial z}{\partial p} \;=\; -\frac{1}{g\rho}\;.$$

Seega on saadud võrrandid kaduvväikeste vertikaalkiirenduste tingimustes ekvivalentsed tavaliste hüdrostaatiliste p–ruumi võrranditega, mida geofüüsikute kõnepruugis nimetatakse tavavõrranditeks (primitive equations). Tavavõrrandid esindavad lihtsaimat akustiliselt filtreeritud dünaamikamudelit p–ruumis, st. mudelit, mille lahendid ei sisalda häälelaineid. Tavavõrrandite rakenduspiirkond on suuremastaabilised dünaamilised protsessid, kus liikumiste sisemine karakteristlik mõõde on 10 kilomeetrit või suurem.

4. Akustiline filtreerimine mõjuintegraalis

Et üldistest p–ruumi võrrandeist on imelihtsalt saadavad akustiliselt filtreeritud tavavõrrandid, siis on paeluv proovida tuletada nende baasil ka üldisemaid filtreeritud p–ruumi võrrandeid, mis külmutaksid ebasoovitavad akustilised mürad, oleksid täpsed aeglaste protsesside kirjeldamisel ja töötaksid ka lühemates skaalapiirkondades kui seda võimaldavad tavavõrrandid. Mitmeid selliseid mudeleid ongi loodud sel teel, et on katseliselt üldistatud tavavõrrandid mittehüdrostaatiliste parandite lisamisega (Miller ja Pearce 1974, White 1989, Salmon ja Smith 1994*).

Küllat üldine, ülevaatlik ja (ajurakkudele) ökonoomne on lihtsustamine sel teel, et approksimeerime sobival viisil Lagrange'i funktsiooni mõjuintegraalis. Kui seejuures suudame säilitada lagranžiaani esialgsed sümmeetriad ruumi– ja ajateisendustel, siis säilitame ka kõik nendega seotud jäävusseadused. Nii näiteks on täpne lagranžiaan (9) invariantne ajanihetel (ei sisalda ilmutatult aega t), horisontaalsetel ruuminihetel (ei sisalda horisontaalkoordinaate $\mathbf{x}$) ja pööretel ümber vertikaaltelje (puuduvad eelistatud horisontaalsuunad). Tulemusena on jäävad süsteemi energia, horisontaalne impulss ja nn. potentsiaalne pööris. Kui tahame, et need jäävused kanduksid üle ka lähendmudelisse, peame hoolitsema, et Lagrange'i funktsiooni approksiomeerimisel ei tekiks l–i ilmutatud sõltuvusi t–st ja $\mathbf{x}$–st.

* Salmon ja Smith kasutavad ka variatsioonitehnikat. Et neil ei ole aga üldised võrrandid teada, arendavad nad variatsiooniprintsiibi, mis toob kohe filtreeritud White'i (1989) mudelile.

Teatud probleem võib aga tekkida seoses sellega, et lagranžiaanist endast ei nähtu ilmutatult, millised on need lähendid, mis toovad endaga kaasa akustiliste vabadusastmete külmutamise. Kaudne vihje on siiski olemas, nimelt tähendab vabadusastmete külmutamine alati vaadeldava süsteemi ajalise järgu alandamist. Lagranžiaani (9) puhul tähendab see üsna ühemõtteliselt, et lähendusi tuleb otsida kiirusvektoritele $\dot{z}$ ja/või $\dot{\mathbf{x}}$. Katsed tuletada algvõrrandid lagranžiaani approksimeerimisega näitavad tõesti, et filtreerivaid approksimatsioone tuleb otsida $\dot{z}$ lähendamises.

4.1. Algvõrrandite saamine vähimmmõju printsiibist. Algvõrrandite saamiseks tuleb l avaldises panna $\dot{z} \to 0$:

$$l \;=\; \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} \;-\; h(p,s) \;-\; gz \cdot \left(1 \;-\; \frac{1}{n}\right) \;.$$

Pannes selle avaldise Lagrange'i võrrandeisse (11), saame juba eespool kirjeldatud hüdrostaatilised algvõrrandid. Seejuures annab võrrand (11a) tulemuseks kokkusurumatustingimuse $n = 1$, ilma et me seda lagranžiaanis oleksime eeldanud. Veelgi enam, lähendamine $n \to 1$ lagranžiaanis annaks valed võrrandid.

4.2. Filtreeriv mittehüdrostaatiline approksimatsioon $\dot{z} \approx \dot{z}^*$, kus z^* on kõrgusvälja hüdrostaatiline approksimatsioon vastavalt võrrandile

$$\frac{\partial z^*}{\partial p} \;=\; -\,\frac{1}{g\rho^*}\;,$$

on eelmise juhu loomulik üldistus, mis aga erinevalt eelmisest juhust annab mittehüdrostaatilise akustiliselt filtreeritud mudeli. Siin ρ^* on mõnesugune sobilikult valitud tihedusjaotus atmosfääris. Ahvatlev oleks ρ^* samastamine tegeliku tihedusega $\rho(\mathbf{x},\ p,\ t)$, kuid see tooks paratamatult kaasa horisontaalkoordinaatide ja aja ilmutatud esinemise aproksimeeritud l–is ja seega energia- ja impulsi jäävuse rikkumise. Seepärast on siin mõistlik lähendada $\rho^* = \overline{\rho}(p)$, kus $\overline{\rho}$ on ρ keskmine, ajast ja horisontaalkoordinaatidest sõltumatu tihedusjaotus. See toob lähendlagranžiaanile

$$l \;=\; \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}^2 \;+\; \frac{1}{2g^2}\,(\dot{z}^*)^2 \;-\; h(s,p) \;-\; gz\left(1 \;-\; \frac{1}{n}\right)\;,$$

millele vastav dünaamika on taas kokkusurumatu p–ruumis, nii et $n \;=\; 1$ ja kehtib pidevusvõrrand (12d'). Mehhaanilised liikumisvõrrandid (võrrandite (12a) ja (12b) approksimeeritud analoogid) on

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g^2\rho^* \left(\frac{1}{g\rho} + \frac{\partial z}{\partial p} \right) , \qquad (13a)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -g\frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}} . \qquad (13b)$$

kus

$$w \equiv \frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}t} = - \frac{\dot{p}}{g\rho^*} . \qquad (13c)$$

Mudeli sulgemiseks on tarvis seda veel täiendada entalpia avaldisega ja entroopiavõrrandiga. Äsjakirjeldatud mudel üldistab Miller–Pearce'i (1974) mudelit ja läheb selleks üle (13a) parema poole lineariseerimisel baasseisundi $z = z^*$, $\rho = \rho^*$ suhtes.

4.3. Filtreeriv lähend $\dot{z} \approx (-1/g)\dot{h}(p,s)$. Selle approksimatsiooni on välja pakkunud Salmon ja Smith (1994). Seega lähendatakse vertikaalkiirust (miinusmärgiga) raskuskiirendusega jagatud entalpiatiheduse materiaalse muutumiskiirusega. Lähendi kasutamist õigustab asjaolu, et entroopia konservatiivsuse tingimustes ($ds/dt = 0$) kehtib siin hüdrostaatiline lähend vertikaalkiirusele $dz/dt = - \dot{p}/(g\rho)$, mis on analoogiline eelmise mudeli võrrandiga (13c), kuid käesoleval juhul ei ole vaja eeldada, et tihedus oleks lähendatud mingi keskmisega.

Approksimeeritud Lagrange'i funktsioon on

$$l = l(\dot{\mathbf{x}}, \dot{h}, h, z, n) = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2g^2}\,\dot{h}^2 - h(s,p) - gz\left(1 - \frac{1}{n}\right) ,$$

liikumine on taas kokkusurumatu p–ruumis ja kogu mudel on väljanägemiselt väga lähedane eelnevale. Ainukeseks erinevuseks on võrrandite (13a) ja (13b) asendumine võrranditega

$$\frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}t} = g\left(1 + g\rho\frac{\partial z}{\partial p}\right) .$$

$$w_h \equiv -\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{p}}{g\rho} - \frac{\Theta\dot{s}}{g} .$$

Saadud mudel on vaadeldav eelnevate mudelite üldistusena, kuid seda ainult ühel juhul – isentroopiliste protsesside korral, s.o. entroopiaallikate puudumisel. Tema eeliseks on kõikide täpse dünaamika jäävusseaduste püsimajäämine ilma täiendavate eeldusteta (eelmises näites oli tarvilik tiheduse lähendamine horisontaalsuunas homogeense, ajast sõltumatu väljaga).

Lõpetuseks.

Toodud lühikeses ülevaates püüdsin anda mõningase ettekujutuse variatsiooniprintsiipide rakendamisest pideva keskkonna, konkreetselt atmosfääri, lihtsustatud mudelite saamiseks. Rakendusi silmas pidades on probleemi formuleeritud ja vaadeldud spetsiaalses koordinaatsüsteemis – rõhukoordinaatides. See ei ole aga printsipiaalne kitsendus, ja soovi korral saab kõik kirjeldatud filtreerivad lähendid tuletada tavakoordinaatides, s.o. Serrini formalismist lähtudes.

Üldine kogemus on, et näivalt väikesed muudatused Lagrange'i funktsioonis kutsuvad reeglina esile suuri muudatusi dünaamika võrrandites ja ka lahendite struktuuris. Seepärast peab igasuguste lähendite kasutamisel olema ettevaatlik, ja mis peamine – saadud mudeleid on vajalik igal juhul katsetada testülesannetel. Seda enam, et ei mõjuintegraalist, lagranžiaanist ega kogu vähimmõju printsiibi ideoloogiast ei tulene mingeid järeldusi ega aprioorseid kriteeriume saadava lähendmudeli lahendite täpsuse kohta. Nagu näitavad numbrilised testid voolamisega üle ebaühtlase aluspinna, on punktides 4.2 ja 4.3 kirjeldatud filtreeritud mudelid omavahel lähedased ja nad on väga täpsed aeglaste protsesside modelleerimisel skaalapiirkonnas 100st meetrist kuni planetaarsete protsessideni karakeritlike mõõtmetega 10 tuhat kilomeetrit. Seega nad kirjeldavad suure osa nii hüdrostaatilistest kui ka mittehüdrostaatilistest nähtustest. Hätta võivad nad jääda ja anda vigaseid lahendeid, kui atmosfääris on tugevad temperatuurihüpped (näiteks soe õhumass paikneb külma peal nii et nende piiril on mitmekraadine temperatuurihüpe) ning samuti skaalapiirkonnas alla 100 meetri. Kui protsesside karakteristlik mõõde on alla saja meetri, ilmevad juba dünaamilise kokkusurutavuse effektid ja n ei ole enam piisav täpsusega üks, mis põhjustab süstemaatilisi vigu termodünaamilistes väljades. Mehhaaniline voolupilt on aga väga tõelähedane ka skaalapiirkonnas alla kriitilise saja meetri.

Oma hea täpsuse, lihtsuse ja esituslaadi läheduse tõttu primitiivsetele algvõrranditele on punkides 4.2 ja 4.3 kirjeldatud mittehüdrostaatilised p–ruumi akustiliselt filtreerutud mudelid mugavad kasutamiseks numbrilistes skeemides. Praegu on punkti 4.2 mudel rakendusjärgus Tartu Observatooriumi dünaamilise meteoroloogia töörühmas,

võrrandeil (12e), (12d'), (13a) – (13b) rajanevat arvutusskeemi viiakse sisse Põhjamaade ilmennustusmudelisse HIRLAM (**HI**gh **R**esolution **L**imited **A**rea **M**odeling). Üksikasjalikumat teavet HIRLAMi kohta on leida WWW aadressidel
http://www.knmi.nl/PROJECTS/HIRLAM/ ja http://apollo.aai.ee/hirlam.html .

Kirjandus

Arnol'd, V. I., 1965: Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **162**, 975 – 978; Eng. transl.: *Sov. Math.*, **6**, 773 – 777, 1965.

Arnol'd, V. I., 1969: The Hamiltonian nature of the Euler equations in the dynamics of a rigid body and of a perfect fluid. *Usp. Mat. Nauk*, **24**, 225 – 226. (In Russ.; rough transl. avail. from author)

Clebsch, A., 1857: *J. Reine Angew. Math.*, **54**, 293 – 297.

Clebsch, A., 1859: Über die Integration der Hüdrodünamischen Gleichungen. *Crelles' J.*, **56**, 1 – 10.

Miller, M. J., 1974: On the use of pressure as vertical co-ordinate in modeling convection. *Q. J. R. Meteorol. Soc..*,**100**, 155 – 162.

Miller, M. J. and R. P. Pearce, 1974: A three-dimensional primitive equation model of cumulonimbus convection. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **100**, 133 – 154.

Rõõm, R., 1989: General form of dynamical equations of the atmosphere in the isobaric coordinate space. *Proc. Estonian Acad. Sci.*, **38**, 371.

Rõõm, R., 1990: General form of the dynamic equations for the ideal atmosphere in the isobaric coordinate system. *Atm. Ocean Physics*, **26**, 17 – 26.

Rõõm, R. and A. Ülejõe, 1996: nonhydrostatic acoustically filtered equations of atmospheric dynamics in pressure coordinates. *Proc. Estonian Academy Sci., Phys., Math.*, **45**, 421 – 429.

Rõõm, R., 1997*: Nonhydrostatic atmospheric dynamics in pressure-related coordinates. Technical Report, Estonian Science Foundation grant No. 172. Tartu Observatory, 105 pp.

Rõõm, R., 1998*: Acoustic filtering in nonhydrostatic pressure coordinate dynamics: a variational approach. *J. Atmos. Sci.*, **55,** (January 15).

Roulstone, I. and S.J. Brice, 1995: On the Hamiltonian formulation of the quasi–-hydrostatic equations. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **121**, 927 – 936.

Salmon, R. 1983: Practical use of Hamilton's principle. *J. Fluid Mech.*, **132**, 431 – 444.

Salmon, R. 1988: Semi–geostrophic theory as a Dirac bracket projection. *J. Fluid. Mech.*, **196**, 345 –358.

Salmon and R., L. M. Smith, 1994: Hamiltonian derivation of the nonhydrostatic pressure–coordinate model. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **120**, 1409 – 1413.

Shepherd, T. G., 1990: Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. *Advances in Geophysics*, **32**, 287 – 338.

Serrin, J., 1959: Mathematical principles of Classical Fluid Mechanics. In: Handbuch der Physik, Band VIII/1, Strömungmechanik I, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg. pp. 125 -263.

White, A. A. ,1989: An extended version of nonhydrostatic, pressure coordinate model. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **115**, 1243 – 1251.

.

* Kättesaadav FTP–aadressil: apollo.aai.ee (193.40.1.4)