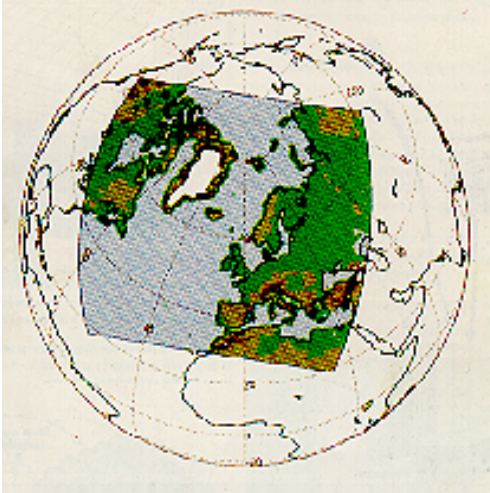


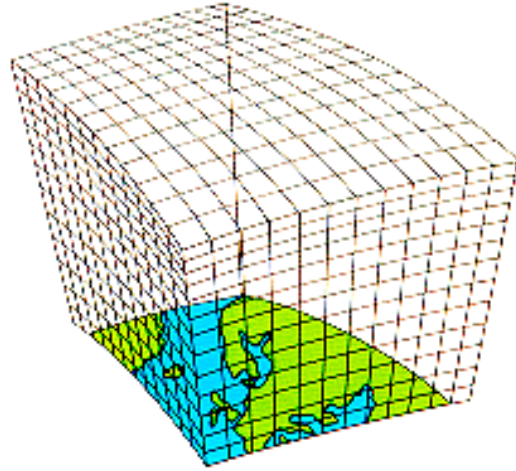
I OSA
PIDEV FORMALISM

§1. VÕRRANDID CARTESIUSE KOORDINAATIDES

1.1. Lähtevõrrandid



Joon.1 HIRLAMi piirkond



Joon. 2 Piiritletud ala

Võrrandid ala sees, ääretingimused piirpindadel, algtingimused alghetkel

Algsed võrrandid Cartesiuse ristkoordinaatides

$$\frac{dv_x}{dt} = -(1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} + fv_y + F_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -(1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} - fv_x + F_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -(1/\rho) \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

$$\frac{de_s}{dt} + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = F_s$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho D$$

kus v_x, v_y, v_z - kiirus, $g = 9.81$ m/s² - raskuskiirendus, ρ, p - tihedus ja rõhk, $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ - Coriolise parameeter, Ω - Maa nurkkiirus, φ -geogr. laius ($f \sim 10^{-4}$ 1/s meie laiustel). fv_y ja $-fv_x$ on Coriolise jõu komponendid. D on 3d divergents:

$$D = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

e_s – ideaalse gaasi siseenergia:

$$e_s = C_v T$$

kus C_v on isohoorne erisoojus ($= 717 \text{ J/K/kg}$ kuival õhul ja $= 1408 \text{ J/kg/K}$ veeaurul). Lisaks vaja teada id. gaasi olekuvõrrandit

$$p = R\rho T,$$

kus R on gaaskonstant ($= 286.7 \text{ J/kg/K}$ kuival õhul ja 461.5 J/kg/K veeaurul).

F_x, F_y, F_z, F_T on sunnifunktsioonid (forcings), lihtsamates mudelites puuduvad (kuid mitte HIRLAMis).

Algtingimused tuleb anda kõigile suurustele millele on võrrandites ajatuletis.

Ääritingimused

Ääritingimused all

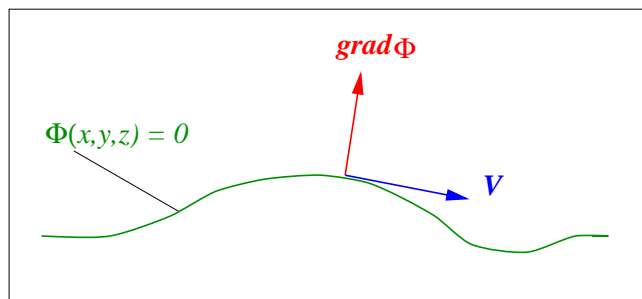
(1). All on sisehõorde puudumisel libisemistingimus ja sisehõorde olemasolul kleepumistingimus kiirusele. Libisemistingimus on kiirusvälja $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ja aluspinna normaali ristseisu tingimus. Kui aluspind antud võrrandiga

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

siis see tingimus on

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad}\Phi = 0, \text{ ehk } v_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

[ainus koht kus kasutan kolmemõõtmelist gradienti *grad* mida tuleb eristada edaspidi kasutatavast kahemõõtmelisest gradiendist ∇ .]



Joon. 3 Libisemistingimuse juurde

Erijuhul, kui pinnavõrrand on

$$\Phi(x, y, z) \equiv h(x, y) - z = 0,$$

kus $h(x, y)$ on aluspinna kõrgus merepinnast, annab see

$$(v_z)_h = (v_x)_h \frac{\partial h}{\partial x} + (v_y)_h \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Kui on sisehõõre, siis on aluspinnal kleepumine, mis annab

$$(v_x)_h = 0, \quad (v_y)_h = 0, \quad (v_z)_h = 0.$$

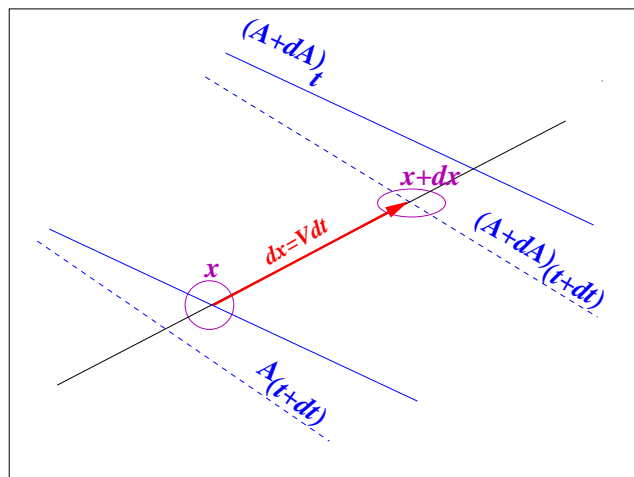
(2) Lisaks on vajalik aluspinnal anda kõikide evolutsiooniliste väljade normaaltuletiste väärtused, muidu ei oskaks arvutada adveksioone, millest tuleb juttu edaspidi.

Ääritingimused ülal

Need on tõkestatuse tingimused

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \rho = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\rho v_z) = 0$$

Täistuletis (materiaalne e. Lagrange'i ajatuletis) d/dt on seotud liikuva elementaarse (kuid makroskoopilise) gaasiosakesega



Joon. 4 Osake, trajektoor ja Lagrange tuletis

ja kirjeldab suuruste/väljade muutumist selle osakese sees

$$\frac{dA(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial x} + v_y \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial y} + v_z \frac{\partial A(x, y, z, t)}{\partial z}$$

ehk lühemalt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} - \hat{a}(A)$$

kus $\hat{a}()$ on (talle mõjuva funktsiooni suhtes lineaarne) adveksioonioperaator

$$\hat{a}(A) = - \left(v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \right)$$

1.2. Horisontaalse liikumisvõrrandi alternatiivkujud

Kui korrutame v_x ja v_y võrrandid ühikvektoritega \mathbf{i} , \mathbf{j} ja liidame, saame vektorvõrrandi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

kus

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y, \quad \mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y.$$

(Selles kursuses kasutatakse vektorsümboolikat rangelt horisontaalses kontekstis.) Adveksiooniliikme väljaeraldamisel saame toodud vektorvõrrandi kujule

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \hat{a}(\mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}\nabla p - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

Adveksioon horisontaalkiirusele \mathbf{v} esitub

$$\hat{a}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - v_z \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}.$$

Kuna kehtib (vt. hd. õpikud)

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla E - \xi \mathbf{k} \times \mathbf{v},$$

kus E ja ξ on horisontaalliikumise kineetilise energia tihedus ja pööris:

$$E = \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{2}, \quad \xi = \mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

saab horisontaalse liikumise vektorvõrrandi esitada ka gradient- ja pöörisliikmeid grupeerides:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -v_z \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} - \nabla E - \frac{1}{\rho}\nabla p - (f + \xi)\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}.$$

See on juba küllat lähedane HIRLAMis kasutatavale esitusviisile.

1.3. Hüdrostaatilise tasakaalu lihtsustus

Üks lihtsustus on juba varem tehtud: Coriolise jõud on asendatud meie valemite tema horisontaalkomponendiga. Nüüd tuleb teine oluline lihtsustus, mis on tehtud HIRLAMi puhul: hüdrostaatilise tasakaalu approksimatsioon. Tulemusena lähevad esialgsed täpsed võrrandid üle nn. algvõrrandiks (Primitive equations).

Üldine vertikaalne liikumisvõrrand on kirja pandav kujul

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \left(1 + \frac{H}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + F_z$$

kus

$$H = \frac{RT}{g}$$

on reaalse atmosfääri kõrguskaala (≈ 9 km). HS lähendis saame

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{H}.$$

Seega, HS primitiivvõrrandid on

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \nabla E - \frac{1}{\rho} \nabla p - (f + \xi) \mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{H} \quad (= -g\rho)$$

$$\frac{de_s}{dt} + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = F_s$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho D$$

$$p = R\rho T$$

1.4. Veeaur, pilvevesi (udu), temperatuurivõrrand ja virtuaalne temperatuur

Kui on veeaur ja udu, siis lisanduvad veeauru ja tilkvee transpordivõrrandid

$$\frac{dq}{dt} = F_q$$

$$\frac{dq_l}{dt} = F_{q_l}$$

kus q , q_l – veeauru ja vee mass massiühiku märja õhu kohta (nn. segusuhted, vt. allpool), F on aga taas vastavad sunnifunktsioonid (kirjeldavad veeauru ja tilkvee faasitransformatsioone).

Kuiva õhu ja veeauru segus (niiskes õhus) kehtivad termodünaamilised seosed (indeks "d" – kuiv, "v" – märg)

$$p_d = R_d \rho_d T, \quad p_v = R_v \rho_v T,$$

Kogurõhu jaoks saame siit

$$p = p_d + p_v = (R_d \rho_d + R_v \rho_v) T.$$

Kui tuua sisse kogutihedus ρ ja segusuhe q seostega:

$$\rho = \rho_d + \rho_v, \quad \rho_v = q\rho, \quad \rho_d = (1 - q)\rho$$

siis on niiske õhu gaaskonstant ja erisoojused esitatavad

$$R = (1 - q)R_d + qR_v, \quad C_v = (1 - q)C_{vd} + qC_{vv}, \quad C_p = (1 - q)C_{pd} + qC_{pv}$$

Niisiis on need mitte konstantsed suurused vaid muutuvad väljad. Nüüd saame varasema olekuvõrrandi

$$p = R\rho T$$

Samuti jääb jõusse id. gaasi siseenergia valem

$$e_s = C_v T$$

Virtuaalne temperatuur defineeritakse seosega

$$RT = R_d T_v$$

See võimaldab kirjutada olekuvõrrandi ka kujul

$$p = R_d \rho T_v$$

Seos T_v ja T vahel on kirja pandav kujul

$$T_v = (1 + q/\varepsilon - q)T = (1 + 0.609q)T$$

kus $\varepsilon = R_d/R_v = 0.622$. Tegelikult ei ole virtuaaltemp. järele mingit vajadust ja ma toon ta sisse ainult seetõttu, et HIRLAM seda abisuurust kasutab.

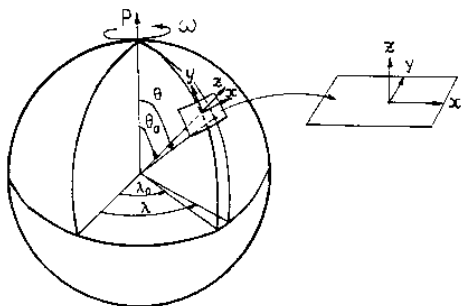
Kui panna e_s definitsioon sisseenergia võrrandisse, siis saame C_v sõltuvust q -st arvesse võttes temperatuurivõrrandi kujul

$$\frac{dT}{dt} + \frac{p}{C_v} \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = F_T \equiv \frac{1}{C_v} [F_s - T(C_{vv} - C_{vd})F_q]$$

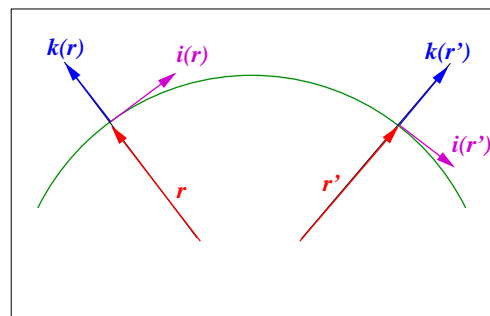
Sellisel kujul tegelikult T võrrandit vaja ei ole ja siia on ta toodud vaid illustratsiooniks.

1.5. Sfäärilised koordinaadid

HIRLAMi ala (kuid siiki mitte HIRLAM-E ala) on piisavalt suur, et Maa sfäärilisusest tingitud kõverjoonelist geomeeriat arvesse võtta.



Joon. 5a.
Sfääriline geomeetria



Joon. 5b. Ühikvektorite teisenemine liikumisel

Et atmosfäär on õhuke, siis avaldub sfäärilisus ainult horisontaalsuundades, ja teeb ta seda kahel viisil:

- muutustega gradient ja divergentsoperaatorites;
- baasvektorite $\{\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}\}$ teisenemisest tulenevate lisaliikmete ilmumisega.

Teist efekti HIRLAM ignoreerib täielikult. Seda efekti ignoreerivad kõik mudelid, v.a. globaalmodelid pooluste lähedal, so. seal, kus koordinaatjooned kuhjuvad. Vastavad lisaliikmed originaalsetes liikumisvõrrandites oleksid (paremale poole paigutatuna)

$$-(v_z v_\lambda + v_\lambda v_\theta \operatorname{tg}\theta)/a, \quad -(v_z v_\lambda - v_\lambda^2 \operatorname{tg}\theta)/a, \quad \text{ja} \quad (v_\lambda^2 + v_\theta^2)/a,$$

kus a on Maa raadius. Siin $v_\lambda = v_x = u$ ja $v_\theta = v_y = v$ on piki paralleeli ja meridiaani suunatud kiiruse komponendid. Toodud lisaliikmed on tõesti väikesed, kui θ ei ole just pooluse juures või liikumise horisontaalskaala ei ole planetaarse mastaabiga. Ja HIRLAM kasutab spetsiaalselt määratud sf. koordinaate. nii et ala keskelt läheb läbi koord.süsteemi ekvaator ja koord.süsteemi poolus jääb kaugemale väljapoole.

Esimest efekti tuleb aga ikkagi arvesse võtta. Seda tehakse seostega

$$dx = h_\lambda d\lambda, \quad dy = h_\theta d\theta,$$

kus h_λ, h_θ on meetrilised koeffitsiendid

$$h_\lambda = a \cos\theta, \quad h_\theta = a$$

Need seosed määravad nii lineaarsed elemendid dx, dy sfääril, pindalaelemendi $dS = dx \cdot dy = h_\lambda h_\theta d\lambda d\theta$, kui ka gradiendi:

$$\nabla f \equiv \mathbf{e}_\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

Veidi keerulisemad on valemid horisontaalsele divergentsile ja pöörisele

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_\lambda h_\theta} \left(\frac{\partial h_\theta v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial h_\lambda v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\xi = \frac{1}{h_\lambda h_\theta} \left(\frac{\partial h_\theta v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial h_\lambda v_\lambda}{\partial \theta} \right)$$

Adveksioonioperaatorile saame avaldise

$$\hat{a}(A) = - \left(\frac{v_\lambda}{h_\lambda} \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{h_\theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \right)$$

Kokkuvõtvalt saab HS horisontaalse liikumise võrrandid nüüd kirjutada niimoodi:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \hat{a}(v_x) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v_y + F_x ,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \hat{a}(v_y) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f v_x + F_y .$$

Vektorkuju ei ole siin enam võimalik, kuna horisontaalsed ühikvektorid ja horisontaalne gradient et kommuteeru. Küll saab aga soovi korral kirjutada horisontaalse liikumise võrrandid alternatiivselt (vt. lk 4) sfäärilistes koordinaatides kujul mis ühtib Cartesiuse koordinaatides kirjutanduga:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \nabla E - \frac{1}{\rho} \nabla p - (f + \xi) \mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F} .$$

ülejäänud võrrandid ei muutu üldse:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{H}$$

$$\frac{de_s}{dt} + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = F_s$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho D$$

$$p = R\rho T$$

Nii et varasem HS mudeli esitus säilib, modifitseeruvad vaid gradientide, adveksioonide ja pöörise esitused.

§2. HÜDROSTAATILISED VÕRRANDID RÕHUGA SEOTUD KOORDINAATIDES

2.1. Üleminek rõhukoordinaatidesse

Kõige parem on lähtuda HS võrrandeist vektorkujul, ilma Lagrange'i tuletist lihtsutamata ja adveksiooni välja eraldamata ning esialgu ka igauguste vihjeteta sfäärilisele geomeetriaale:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

$$\frac{de_s}{dt} + p\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho} = F_s$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho D$$

$$p = R\rho T$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{H} \quad (= -g\rho).$$

Kasutades ära p ja z vahelise seose monotoonsuse, läheme siin üle koordinaatidelt $\{x, y, z, t\}$ komplektile $\{x, y, p, t\}$, vaadeldes kõiki välju uute muutujate funktsioonidena. Horisontaalse kiiruse \mathbf{v} , temperatuuri T ja sundide \mathbf{F} , F_s definitsioonid jäävad paika, samuti ei muutu tiheduse ρ tähendus, kuigi seda ei lähe enam vaja. Mis aga kaob, on D ; seda suurust on rõhuruumis raske interpreteerida. Selle asemele tuleb 3d divergents rõhuruumis, mis aga osutub nulliks.

Kõige lihtsam on viimase võrrandiga, see pöördub lihtsalt pea peale:

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{H}{p}$$

Suhteliselt lihtne on ka olukord Lagrange'i tuletise esitamisega:

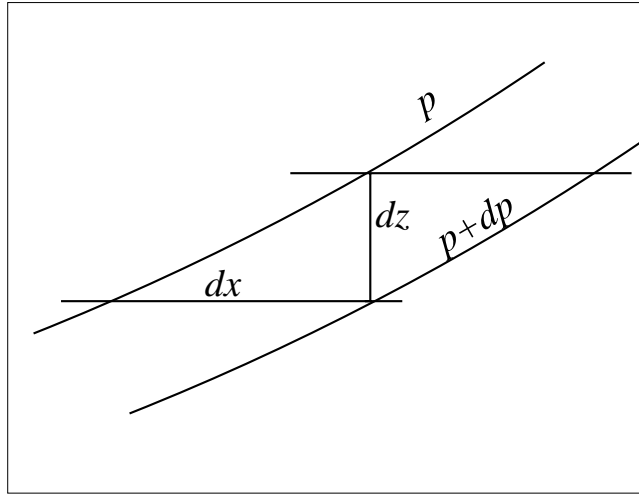
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A + \omega \frac{\partial A}{\partial p},$$

kus

$$\omega = \dot{p} = \frac{dp}{dt}$$

on vertikaalkiirus rõhuteljel (osakese nihkumiskiirus isobaarpindade suhtes). \mathcal{NB} ! ∇ on siin gradient isobaarpinnal!

Rohkem tööd on horisontaalse rõhujõuga.



Joon. 6 Rõhujõu arvutuse selgituseks.

Kuna sama Δx korral saame rõhumuudu fikseeritud kõrgusel (vanades koordinaatides) $(\delta p)_z$ ja sellele vastava kõrgusmuudu isobaarpinnal (uutes koordinaatides) $(\Delta z)_p$ siduda võrdusega

$$(\Delta p)_z = -\frac{\partial p}{\partial z}(\Delta z)_p = \frac{1}{g\rho}(\Delta z)_p,$$

siis kehtib

$$\rho(\nabla p)_{\text{tavakoordinaadid}} = g(\nabla z)_{\text{rõhukoordinaadid}}$$

Seega esimene võrrand läheb kujule:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\varphi - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

kus $\varphi(\mathbf{x}, p, t) = gz(\mathbf{x}, p, t)$ on **geopotentsiaal**.

Temperatuurivõrrand. Siseenergia võrrandi kirjutame ajatuletisi ümber grupeerides kujul

$$\frac{d}{dt} \left(e_s + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\omega}{\rho} = F_s$$

Et

$$e_s + \frac{p}{\rho} = C_v T + RT = C_p T, \quad \frac{\omega}{\rho} = \omega \frac{RT}{p},$$

Siis saame siit kerge vaevaga temperatuurivõrrandi kujul

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega}{p} \frac{R}{C_p} T + F_T,$$

kus

$$F_T = \frac{1}{C_p} [F_s - T(C_{pv} - C_{pd})F_q]$$

HIRLAM Manual toob siin sisse virtuaaltemperatuuri ja kirjutab selle võrrandi kujul

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega}{p} \frac{\kappa}{1 + (\delta - 1)q} T_v + F_T ,$$

kus

$$\kappa = R_d/C_{pd} , \quad \delta = C_{pv}/C_{pd} .$$

Tihedusvõrrand. Tihedusvõrrandi saame kirjutada pidevuse kaalutlustest lähtudes p -ruumi materiatihedusele ρ_p

$$\frac{d\rho_p}{dt} = -\rho_p D_p ,$$

kus

$$D_p = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

on p -ruumi 3d divergents (gradient ∇ arvutet isobaarpinnal!).

Et horisontaalne pinnaelement $dS = dx \cdot dy$ on koordinaatteisendusel $z \rightarrow p$ muutumatu, siis on materiatihedused ρ_p ja ρ seotud võrdusega

$$\rho_p |dp| = \rho |dz|$$

Kuna hüdrostaatikaseos annab

$$|dz| = g\rho |dp| ,$$

saame

$$\rho_p = \frac{1}{g}$$

Niisiis, HS liikumisel on rõhuruumi tihedus konstant ja tihedusvõrrand ρ_p -le kõdub kokkusurumatus-(ehk pidevus-)tingimuseks

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 .$$

See kokkusurumatustingimus on õieti ainus eelis, mis teeb rõhukoordinaatide kasutamise eriliseks.

Aluspinna rõhuvõrrand. Et integreerida hüdrostaatikavõrrandit φ -le (või z -le, mis on samaväärne), on vaja teada alumist integreerimisraja $p_s(\mathbf{x}, t)$. Selle jaoks kasutame tingimust, et atmosfääri alumine piirpind p_s peab liikuma samamoodi kui osakesed selle vahetus läheduses (see on keskkonna pidevustingimus rõhuruumi alumisel piiril):

$$\frac{dp_s}{dt} = (\omega)_{p_s}$$

Tegu on differentiaalvõrrandiga, mis tuleb lisada teistele evol. võrranditele. Kasutades kokkusurumatustingimuse integreeritud kuju:

$$\omega = - \int_0^p \nabla \cdot \mathbf{v} dp' ,$$

saame selle võrrandi peale mõningast nikerdamist tuua kujule

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_0^{p_s} \mathbf{v} dp \right) = 0 ,$$

mis seost *ühiksamba mass* = gp_s arvestades ei ole midagi muud kui üle vertikaali integreeritud massijäävusseadus.

HS VÕRRANDID P -RUUMIS. Niisiis, oleme saanud:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \nabla\varphi - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega}{p} \frac{R}{C_p} T + F_T ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = - \frac{gH}{p} \quad \left(= - \frac{RT}{p} \right) ,$$

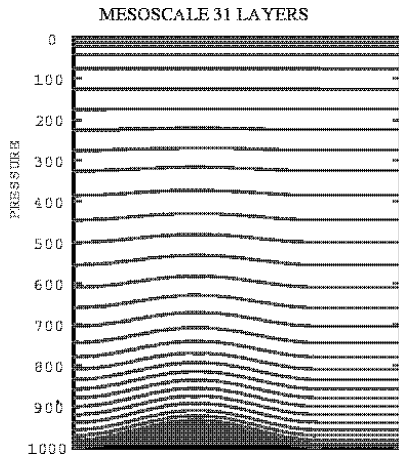
$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_0^{p_s} \mathbf{v} dp \right) = 0 .$$

2.2. Võrrandid hübriidkoordinaatides

”Puhas” sigmakoordinaat on aluspinnarõhule normeeritud rõhukoordinaat:

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

Et σ muutub piirides nullist üheni, siis on sigmakoordinaatides esitatuna integreerimispiirkond alati risttahukas. Koordinaatpinnad rõhuruumis on aga sarnased aluspinna rõhujaotusele.



Joon. 7. Hübriid-koordinaat-pinnad rõhuruumis

Paremaks kui sigmakoordinaate peetakse segakoordinaate (hübriidkoordinaate), mis aluspinna lähedal on nagu sigmakoordinaadid ja jälgivad aluspinna rõhukõikumisi, atmosfääri ülakihtides aga on sarnased rõhukoordinaadile ning on seal horisontaalsed. Ollakase seisukohal, et niisugused segakoordinaadid peegeldavad paremini atmosfääri tegelikku stratifikatsiooni. Sellised hübriidkoordinaadid on ka HIRLAMis kasutusel.

HIRLAMis (nagu ka ECMWF-is) kasutatakse σ asemel η -t. Teeme seda meiegi edaspidi. Hübriidkoordinaate võib vaadelda puhta rõhukoordinaadi

$$p = p_1(\eta) = \eta \cdot p_0, \quad p_0 = 1000\text{mb}$$

ja puhta etakoordinaadi

$$p = p_2(\eta) = \eta \cdot p_s(\mathbf{x}, t)$$

kaalutud kombinatsioonina

$$p = \mu(\eta)p_1(\eta) + [1 - \mu(\eta)]p_2(\eta) = A(\eta) + B(\eta) \cdot p_s(\mathbf{x}, t)$$

kus $\mu(\eta)$ on positiivne, ühest väiksem funktsioon, mis saavutab väärtuse üks ülapiiril, $\mu(0) = 1$, kahaneb kõrguse kahanedes (η kasvades) monotoonselt ja muutub nulliks alapiiril, $\mu(1) = 0$. Enamasti $\mu(\eta)$ -t ilmutatult sisse ei tooda ja antakse funktsioonide A ja B

$$A(\eta) = p_0\eta\mu(\eta), \quad B(\eta) = \eta[1 - \mu(\eta)]$$

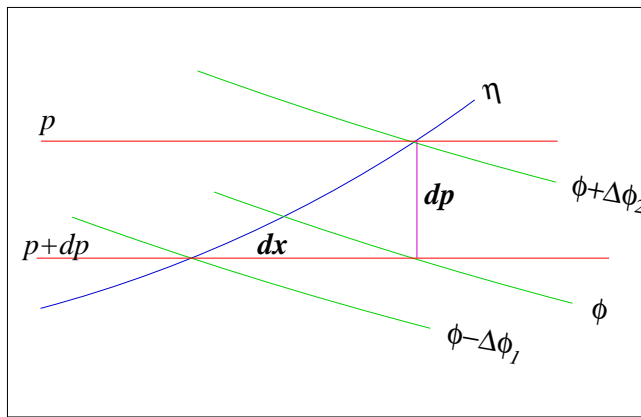
väärtused. Ainus asi, mis me peame üldkujul üleminekuks teadma, on see, et $p = p(\eta, \mathbf{x}, t)$ on alati ja kõikjal η monotoonne funktsioon, nii et eksisteerib lõplik nullist erinev (positiivne) tuletis $\partial p / \partial \eta$.

Teisendus hübriidkoordinaatidesse on analoogiline eespooltehtud teisendusega tavalistesse p -koordinaatidesse.

Täistuletis esitub

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A + \dot{\eta} \frac{\partial A}{\partial \eta}.$$

kus $\dot{\eta}$ on η muutumiskiirus liikivas osakeses (ω analoog).



Joon. 8. Horisontaalse rõhujõu hübriidkoordinaatesituse tuletuse juurde

Kuna nihkele Δx vastav geopotentsiaalimuut rõhutasandil, $(\Delta\varphi)_p$, ja isoeta-tasandil, $(\Delta\varphi)_\eta$, on seotud valemiga (vt. joon.8)

$$(\Delta\varphi)_p = (\Delta\varphi)_\eta - \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\Delta p)_\eta$$

siis saame hüdrostaatilisest seost arvestades

$$(\nabla\varphi)_p = (\nabla\varphi)_\eta + gH(\nabla \ln p)_\eta .$$

Seega **horisontaalliikumise võrrand** saab olema

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\varphi - gH\nabla \ln p - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

Siin kõik funktsioonid on sõltuvad x, y, η, t -st, ja gradient arvutatakse fikseeritud η korral.

Temperatuurivõrrand ei muutu, kui oleme suutelised esitama ω teadaoleval kujul uute väljade kaudu (tuleb hiljem).

Toome sisse hübriidruumi massitiheduse m . Et p ruumis oli tihedus konstantne, siis võime m samastada $\partial p / \partial \eta$ -ga (HIRLAM manual kasutabki seda tähist meie m asemel):

$$m = \frac{\partial p}{\partial \eta} .$$

Hüdrostaatikavõrrand teiseneb nüüd kujule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{gH}{p} m$$

Pidevusvõrrand. Natuke rohkem vaeva tuleb näha pidevustingimustega.

Tihedusele m kehtib üldine võrrand (oleks saadav ka teisendamise teel p ruumi kokkusu-
rumatustingimusest, aga lihtsam igal juhul kirjutada üldistest kaalutlustest lähtudes):

$$\frac{dm}{dt} = -mD_\eta, \quad D_\eta = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{1}{h_\theta h_\lambda} \left(\frac{\partial h_\theta v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial h_\lambda v_\theta}{\partial \theta} \right).$$

[Kuigi see pole oluline niikaua, kui piirdume üldiste tähistega horisontaalsetele vektor-
operaatoritele, eeldame siin ja edaspidi kogu aeg, et tegu on sfäärilise geomeetriaga.]
Toodud pidevusvõrrandist on tuletatavad kõik vajalikud töövõrrandid. Kõigepealt, me
saame pidevusvõrrandi ümber kirjutada divergentsel kujul:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \nabla \cdot (m\mathbf{v}) + \frac{\partial m\dot{\eta}}{\partial \eta} = 0.$$

Integreerime selle võrrandi üle η . Kui võtta arvesse, et

$$\int_0^1 m d\eta = p_s,$$

on tulemuseks võrrand aluspinnarõhule

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \int_0^1 m\mathbf{v} d\eta.$$

Teise vajaliku seose – võrrandi ω -le – saame, kui kui diferentseerime m definitsiooni
ajas (Lagr. tuletis) ja vahetame tuletiste võtmise järjekorda

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{dp}{dt} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} \cdot \nabla p - \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \eta}.$$

Asendades siin vasema poole pidevusvõrrandist ning paremal dp/dt ω -ga ja $\partial p/\partial \eta$ m -
ga, saame peale mõningat lihtsustamist

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\omega - \mathbf{v} \cdot \nabla p) = -\nabla \cdot (m\mathbf{v}).$$

See on diffvõrrand suurusele ω , mida vajab temp. võrrandi parem pool. Kasulik on
selle võrrandi integreeritud vorm. Integreerime ta η järgi lõigul $[\eta, 1]$, siis saame seost
 $(\omega - \mathbf{v} \cdot \nabla p)_{\eta=1} = \partial p_s / \partial t$ abiks võttes

$$\omega = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \int_\eta^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta'$$

Siin oleks võimalik ajatuletis paremal elimineerida varem tuletatud võrrandi abil, et aga
HIRLAM Manual seda ei tee, siis jätame meiegi asja nii nagu on.

Lõpuks tuletame diagnostilise seose ka $\dot{\eta}$ -le. Selleks integreerime pidevusvõrrandi divergentset vormi lõigul $[\eta, 1]$. Kui arvestame, et $\dot{\eta}_1 = 0$, saame

$$m\dot{\eta} = \int_{\eta}^1 \frac{\partial m}{\partial t} d\eta + \int_{\eta}^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta$$

Esimene integraal on teisendatav:

$$\int_{\eta}^1 \frac{\partial m}{\partial t} d\eta = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^1 \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial}{\partial t} (p_s - p) = \left(1 - \frac{\partial p}{\partial p_s}\right) \frac{\partial p_s}{\partial t}.$$

Seega

$$m\dot{\eta} = \left(1 - \frac{\partial p}{\partial p_s}\right) \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_{\eta}^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta$$

Seejuures $\partial p / \partial p_s = B(\eta)$ on teadaolev suurus.

2.3. HS mudel hübriidkoordinaatides: kokkuvõte

Kui tuletatud võrrandeis kasutada horisontaalse kiirusvälja advekstiooni esitust ξ ja E kaudu (vt. lk. 8), saab nad kirjutada süsteemina

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - (f + \xi) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \dot{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} - \nabla(\varphi + E) - gH \nabla \ln p + \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T - \dot{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\omega}{p} \frac{R}{C_p} T + F_T,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q - \dot{\eta} \frac{\partial q}{\partial \eta} + F_q,$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla q_l - \dot{\eta} \frac{\partial q_l}{\partial \eta} + F_l$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{gH}{p} m$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \int_0^1 m\mathbf{v} d\eta.$$

$$\omega = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \int_{\eta}^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta'$$

$$m\dot{\eta} = \left(1 - \frac{\partial p}{\partial p_s}\right) \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_{\eta}^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\nabla \cdot (m\mathbf{v}) - \frac{\partial m\dot{\eta}}{\partial \eta}$$

Viimane võrrand – pidevusvõrrand – ei kujuta endast küll iseseisvat võrrandit, kuna m on teiste väljade teadaolev funktsioon, kuid tema kaasamine on otstarbekas ja vajalik mitmel juhul (näiteks bilansside tuletamisel).

Kirjeldatu on sama süsteem, mida kasutab Manual. Et saada täpselt sealne kuju, on vaja

- Kirjutada hor. liikumisvõrrand komponentides;
- Kasutada gradiendi, divergentsi ja ξ esitust sf. koordinaatides;
- Asendada F -liikmed kõikjal $P + K$ -liikmetega;
- Asendada $gH = R_d T_v$ ja $RT/C_p = \kappa T_v / (1 + (\delta - 1)q)$.
- Asendada meie poolt kasutatud nurkkoordinaadid λ ja θ vastavalt x ja y -ga.

Toon siin vaid horisontaallikumise võrrandi komponentides

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (f + \xi)v - \dot{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi + E) + gH \frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \right] + F_\lambda . \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -(f + \xi)u - \dot{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi + E) + gH \frac{\partial \ln p}{\partial \theta} \right] + F_\theta \end{aligned}$$

2.4. Energiabilanss

EB on vajalik korrektsete diskreetsete skeemide saamiseks. Et konstrueerida õiget energiabilanssi diskreetsel juhul, on vaja teada kuidas seda teha pideval juhul.

Vaatame energiabilanssi kineetilise ja potentsiaalse energia summale

$$\mathcal{E} = E + e , \quad e = C_p T$$

Siin e on tegelikult termodünaamiline funktsioon **entalpiatihedus**, mis p -ruumis kannab potentsiaalse energia rolli (geopotentsiaal ei kuulu siin erinevalt tavaruumist energiatiheduse avaldisse). \mathcal{E} avaldis ei sisalda praegu varjatud ehk latentset energiat, mis on atmosfäärsel veeaurul potentsiaalselt olemas ja mis vabaneb kondensatsiooni käigus (hetkel ei ole seda vaja).

Atmosfääri koguenergia on

$$\mathbf{E} = \int_S dS \int_0^1 d\eta m\mathcal{E} = \int_0^{2\pi} d\lambda h_\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta h_\theta \int_0^1 d\eta m\mathcal{E}$$

ja selle muutumiskiirus on

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S dS \int_0^1 d\eta m\mathcal{E} = \int_S dS \int_0^1 d\eta \frac{\partial m\mathcal{E}}{\partial t} .$$

Kasutades liikumivõrrandeid, saab \mathcal{E} jaoks (ja üldse suvalise suuruse jaoks, mis on atmosfääri kirjeldajaväljade teadaolev funktsioon) kirjutada bilansivõrrandi

$$\frac{\partial m\mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot (m\mathbf{J}_\mathcal{E}) - \frac{\partial mJ_\mathcal{E}^\eta}{\partial \eta} + A_\mathcal{E} ,$$

Siin defineeritud uute suuruste konkreetne sisu tuletatakse liikumisvõrrandest. Kui see ajatuletise avaldis panna integraali, siis esimesed kaks divergentsi annavad pindintegraali ja kirjeldavad energiamuutumist süsteemis voo tõttu läbi piirpinna, viimane liige annab vaadeldava välja (käesoleval juhul energia) tekke või kao ala sees. Kui $A \equiv 0$, siis süsteemi energia on **jääv suurus**. [Nagu juba öeldud, bilansivõrrandi võib kirjutada igale/suvalisele keskkonnas (vaadeldavas alas) määratud suurusele. Vähe on aga neid suurusi/välju, mille integraalid on jäävad.]

Tuletame esmalt E ja e bilansi eraldi. E bilansi saame, kui korrutame \mathbf{v} võrrandi skalaarselt $h_\lambda h_\theta m\mathbf{v}$ -ga

$$\begin{aligned} h_\theta h_\lambda m \frac{\partial E}{\partial t} &= -h_\theta h_\lambda m \dot{\eta} \frac{\partial E}{\partial \eta} - m \left(h_\theta v_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + h_\lambda v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\varphi + E) \\ &\quad - RTm \left(h_\theta v_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + h_\lambda v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \ln p + h_\theta h_\lambda m \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

liidame sellele võrrandile $h_\lambda h_\theta E$ -ga läbikorrutatud pidevusvõrrandi

$$h_\theta h_\lambda E \frac{\partial m}{\partial t} = -E \left(\frac{\partial h_\theta m v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial h_\lambda m v_\theta}{\partial \theta} + h_\theta h_\lambda \frac{\partial m \dot{\eta}}{\partial \eta} \right)$$

ja peale sobilikke grupeerimisi (täisdivergentside kokkupanemist) jagame tulemuse taas $h_\lambda h_\theta$ -ga

$$\frac{\partial mE}{\partial t} = -\nabla \cdot (mE\mathbf{v}) - \frac{\partial \dot{\eta} mE}{\partial \eta} - m\mathbf{v} \cdot (\nabla\varphi + RT\nabla \ln p) + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} .$$

[Meetriliste koeffitsientidega $h_\lambda h_\theta$ korrutamine ja siis jagamine on abioperatsioon mis ei ole kohustulik, kuid teeb asja lihtsamaks.] Siit on näha, et E voog on puhtal kujul materiaalne ülekanne (substantsionaalne voog)

$$\mathbf{J}_E = E\mathbf{v} , \quad J_E^\eta = \dot{\eta}E$$

allikad on aga jõudude poolt süsteemi kallal ajaühikus sooritatud töö (s.o. jõudude võimsus = kiirus korda jõud):

$$A_E = -m\mathbf{v} \cdot (\nabla\varphi + RT\nabla \ln p) + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

Analoogiline on entalpiabilansi tuletus. Ainult veidi detailirohkem: kuna lisaks temperatuurivõrrandile ja pidevusvõrrandile on vaja kaasata ka isobaarse erisoojuse C_p võrrand, kuna see on veeauru funktsioon [ise me enne C_p ja T lahutasime temperatuurivõrrandi tuletamisel, aga osutub, et energiabilansi seisukohast on see ebaratsionaalne tegevus]. C_p võrrandi saame lihtsasti q võrrandist, kui paneme tähele, et

$$C_p = C_{pd} + (C_{pv} - C_{pd}) q .$$

Siin ainuke mittekonstantne väli on q . Evolutsioonivõrrand C_p -le saab olema

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla C_p - \dot{\eta} \frac{\partial C_p}{\partial \eta} + F_C$$

Kui korrutame selle võrrandi $h_\lambda h_\theta m T$ -ga, temperatuurivõrrandi $h_\lambda h_\theta m C_p$ -ga ja pidevusvõrrandi $h_\lambda h_\theta C_p T$ -ga, liidame saadud tulemused liikmeti, siis saame peale lihtsustusi

$$\frac{\partial me}{\partial t} = -\nabla \cdot (m e \mathbf{v}) - \frac{\partial \dot{\eta} m e}{\partial \eta} + m \frac{\omega}{p} R T + m F_e .$$

Tulemus on analoogiline varasemaga (ja kinnitab väidet, et igale suurusele saab tuletada standardse bilansi). Liites selle võrrandi E omaga, saame

$$\frac{\partial m \mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot (m \mathcal{E} \mathbf{v}) - \frac{\partial \dot{\eta} m \mathcal{E}}{\partial \eta} + B + m F_{\mathcal{E}} .$$

kus

$$B = -m \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + m R T \left(\frac{\omega}{p} - \mathbf{v} \cdot \nabla \ln p \right) = -m \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + m \frac{R T}{p} (\omega - \mathbf{v} \cdot \nabla p)$$

Liige $m F_{\mathcal{E}}$ kujutab (energia \mathcal{E} suhtes) väliseid allikaid (sisehõõre, soojusallikad) ja võib üldse puududa. Aga B peab kas teisenema täisdivergentsiks või andma nulli, vastasel juhul ei oleks energiabilanss korras (kineetilise energia ja entalpia summa ei säiluks isegi väliste allikate puudumisel). Kasutades hüdrostaatilise tasakaalu võrrandit ning ositi differentseerimist, saame

$$\begin{aligned} B &= -m \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} (\omega - \mathbf{v} \cdot \nabla p) = \\ &= -\nabla \cdot (m \varphi \mathbf{v}) - \frac{\partial \varphi (\omega - \mathbf{v} \cdot p)}{\partial \eta} + \varphi \left[\nabla \cdot (m \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\omega - \mathbf{v} \cdot \nabla p) \right] \end{aligned}$$

Viimane liige nurksulgudes on ω avaldisest tulenevalt null. See nulliks muutuv osa kirjeldab vahetatut kineetilise energia transformatsiooni entalpiaks antud ruumipunktis (kompensatsioonimehhanism). Seega on B täisdivergents:

$$B = -\nabla \cdot (m \varphi \mathbf{v}) - \frac{\partial \varphi (\omega - \mathbf{v} \cdot p)}{\partial \eta} .$$

Siin olev voovektor kirjeldab seda osa enrgiast, mis kineetilise energia ja entalpia vastastikutel üleminekutel ei kompenseeru, vaid kantakse antud ruumipukti(st) materiaalse voona kohale/minema.

Koguvoo jaoks saame

$$\mathbf{J}_E = (\varphi + \mathcal{E})\mathbf{v} , \quad J_E^\eta = (\varphi + \mathcal{E})\dot{\eta} .$$

Potentsiaalne energia, mis ei osalenud energiamäärangus, osaleb siiski energiavoo definitsioonis ja energia materiaalses transpordis.

2.5. Liikumishulga momendi bilanss

Liikumishulga moment = impulssmoment

Vaatame pideval juhul tsonaalse voolamise võrrandit hübriidkoordinaatides

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f + \xi)v - \dot{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi + E) + gH \frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \right] + F_\lambda .$$

Kui siin loobuda ξ , E kasutamisest ja pöörduda tagasi tavaesitusse, saame

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u + \dot{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = fv - \frac{1}{h_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) + F_\lambda$$

[Siin on tehtud võrreldes täpse võrrandiga lähend, millest oli juba juttu eespool (vase-male peaks lisama $v_z u - u^2 \operatorname{tg} \theta / a$), aga HS mudelis see ei ole kriitiline lähend.] Kuna

$$fv = 2\Omega \sin \theta v = 2\Omega \sin \theta a \dot{\theta} = - \frac{d2\Omega a \cos \theta}{dt}$$

siis saame siit võrrandi absoluutse impulssmomenti (absoluutse, kuna sisaldab ka Maaga kaasapöörlemisest tingitud impulssmomenti)

$$\mu = u + 2\Omega a \cos \theta$$

jaoks

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu + \dot{\eta} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = - \frac{1}{h_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) + F_\lambda$$

ehk divergentsel kujul (impulssmomenti bilanssivõrrand)

$$\frac{\partial m\mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}m\mu) + \frac{\partial \dot{\eta}m\mu}{\partial \eta} = - \frac{m}{h_\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) + mF_\lambda$$

Selle võrrandi integreerimine η järgi kaaluga m (s.o.: integreerimine rõhuruumis) annab:

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial m\mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}m\mu) \right] d\eta = - \frac{1}{h_\theta} \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) m d\eta + \int_0^1 mF_\lambda d\eta$$

$$= \frac{1}{h_\lambda} \left(\varphi_s \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 \varphi \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta \right) + \int_0^1 m F_\lambda d\eta$$

Esimese paremaloleva integraali teisendamiseks on kasutatud hüdrostaatikavõrrandit. Selle bilansi integreerimine üle sfääri toob kaasa täisdivergentside kadumise ja paremal jäävad alles liikmed, mis kirjeldavad atmosfääri kui terviku impulssmomendi muutumist esiteks, igasuguste dissipatiivsete hõõrdejõudude F_λ ja teiseks, interaktsiooni tõttu plaanidega. [Tulemuseks on atmosfääri ja Maa impulssmomendi vastastikune vahetus, mis toob kaasa ööpäevapikkuse kõikumised.] Edasiseks on aga oluline, et kehtib siinkasutatud integraalne samasus

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) m d\eta = -\varphi_s \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 \varphi \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta$$

See on üks seos, mille kehtivust hakkame nõudma ka diskreetsel juhul, et saada impulssmomendi bilansi säilumist seal.