II OSA

HIRLAMI DIFERENTSSKEEMID

§1. TOPELTVÕRK

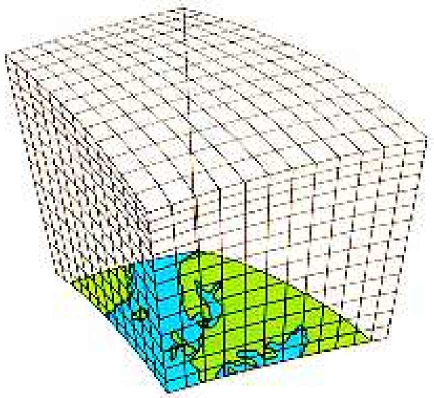
1.1. Topeltvõrk

Terminoloogiaga siiani probleeme:

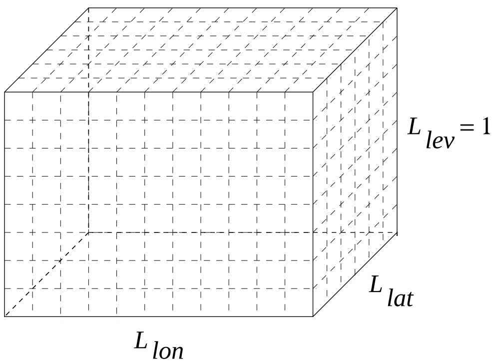
i: *võrk, võrgustik, võre, võrestik.* Mat. Leks. annab siin koordinaatvõrk, võrk.

ii: *Staggered grid* ehk *Arakawa C-grid*: Mat. Leks. ei ütle midagi. Otsetõlge oleks "vankuv võrk". Olen pakkunud e.k.-ks vasteks *nihutatud võrk*, kuid praegu kaldun terminite *topeltvõrk* $\sim$ *C–võrk* poole.

Ala on hübriidkoordinaatruumis ristkülik mõõtmetega L_{lon}kraadi$\times L_{lat}$kraadi $\times\ 1$, sest ala ulatus sihis η on rangelt üks: $0 \ \leq \ \eta \ \leq \ 1$.



Joon.1 Integreerimispiirkond tavalises ruumis



Joon. 2 Integreerimispiirkond hübriidkoordinaatides

Topeltvõrgu korral on hübriidruumi piirkond jaotatud $N_{lon} \times N_{lat} \times N_{lev}$ rakuks mõõtmetega

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda = L_{lon}/N_{lon}\ , \quad \Delta\theta_i = \Delta\theta = L_{lat}/N_{lat}\ , \quad \Delta\eta_i = \Delta\eta = 1/N_{lev}\ .$$

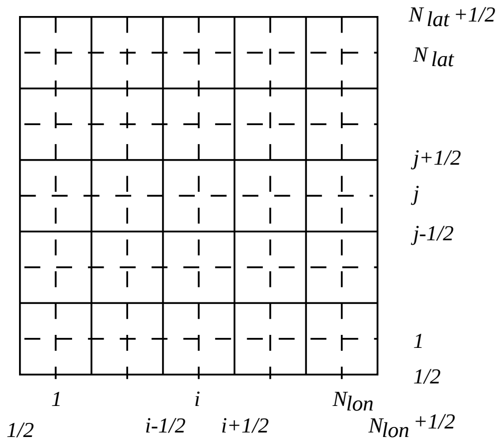
Rakkude lahutuspinnad, mis on ka koordinaatpinnad, moodustavad ühe koordinaatvõrgu, mille indeksid on kokkuleppeliselt poolarvulised

$$i+1/2, \quad i=\overline{0,N_{lon}}, \qquad j+1/2, \quad j=\overline{0,N_{lat}}, \qquad k+1/2, \quad k=\overline{0,N_{lev}}.$$

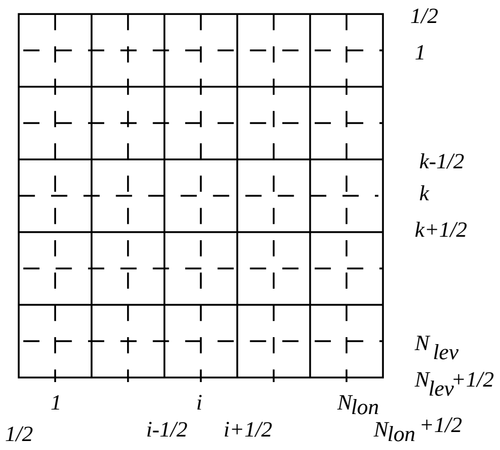
Teine koordinaatvõrk moodustub koordinaatpindadest, mis läbivad rakutsentreid. Kokkuleppeliselt on see koordinaatvõrk indekseeritud täisarvuliselt

$$i, \quad i=\overline{1,N_{lon}}, \qquad j, \quad j=\overline{1,N_{lat}}, \qquad k, \quad k=\overline{1,N_{lev}},$$

nii et osakese asend on täielikult iseloomustatud tema tsentriindeksite kolmikuga $\{ijk\}$.

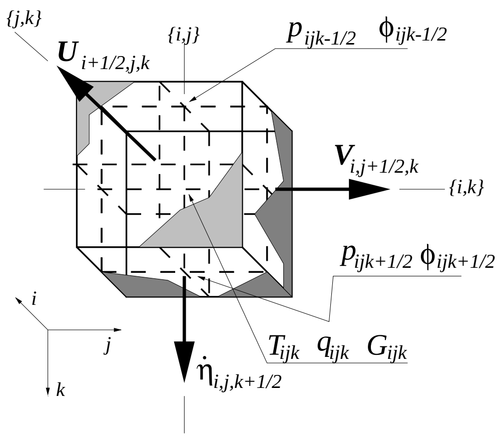


Joon. 3a
Topeltvõrk horisontaaltasandis



Joon. 3b
Topeltvõrk tsonaaltasandis

Joonistel 3 on toodud topeltvõrgu asetus horisontaal- ja tsonaaltasandites. Meridionaaltasandis on pilt analoogiline.



Joon. 4

Väljade paiknemine HIRLAMi topeltvõrgul.

Klassikaline topeltvõrk on selline, kus skalaarväljade väärtused antakse osakese tsentris ja indekseeritakse täisarvuliselt, vektorväljad antakse aga komponenditi erinevatel rakutahkudel ja indekseeritakse nihutatud koordinaadi järgi poolarvuliselt.

HIRLAM-i puhul on klassikaline paigutus skalaarväljadel T, q, q_l, ja kiirusvektori kolmel komponendil u, v, $\dot{\eta}$. Päris rangelt HIRLAMis sellest reeglistikust siiski kinni peetud ei ole ja rõhk p ning geopotentsiaal φ on antud vertikaalsihis nihutatutena allapoole, raku alatahu keskpunkti. Sellise paigutuse on ECMWF kasutusele võtnud juba $\sim$ 1980 (vt. Simmons ja Burridge, 1981 **edaspidi SB**), HIRLAMon sealt oma põhiskeemi täielikult kopeerinud.

Seos p ja dimensioonitu hübriidkoordinaadi η vahel, mis pideval juhul oli

$$p(x, y, \eta, t) = A(\eta) + B(\eta) p_s(\mathbf{x},\ t)\ ,$$

annab diskreetsel juhul, poolarvulistel tasemetel (osakeste lahutuspinnal) seoseks

$$p_{ijk+1/2}(t) = A_{k+1/2} + B_{k+1/2} p_{sij}(t)\ .$$

[Kuna A ja B on analüütilised ja küllat lihtsad η funktsioonid, siis ei oleks raske anda ka p väärtused osakeste tsentrites, aga HIRLAM ei tee seda, vaid eelistab interpoleerida poolarvulistelt tasemetelt.]

1.2. Diferentsvalemid

Mis on topeltvõrgu eeliseks? Haltiner & Williams viitavad asjaolule, et topeltvõrk saab paremini hakkama ujulainete kirjeldamisega. Topeltvõrgu matemaatiline trump on aga selles, et parempoolsete diferentsskeemide rakendamisel annab skaalarvälja gradient vektorvälja, mille väärtused on lokakiseeritud just seal, kus vektorvälja komponendid lokaliseeritud peavad olema, s.o. vastavate "allavoolu"tahkude tsentrites. Ühtlase võresammu tingimustes (konstantsete Δx ja Δy korral) saame:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i+1/2,jk} = \frac{A_{i+1,jk} - A_{ijk}}{\Delta x} , \quad \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{ij+1/2,k} = \frac{A_{ij+1,k} - A_{ijk}}{\Delta y} ,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)_{ijk+1/2} = \frac{A_{ijk+1} - A_{ijk}}{\Delta \eta}$$

Analoogiliselt, vektori $\{A^x, A^y, A^\eta\}$ divergents esitub ühtlasel võrgul

$$\left(\frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^\eta}{\partial \eta}\right)_{ijk} =$$

$$\frac{A^x_{i+1/2,jk} - A^x_{i-1/2,jk}}{\Delta x} + \frac{A^y_{ij+1/2,k} - A^y_{ij-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{A^\eta_{ijk+1/2} - A^\eta_{ijk-1/2}}{\Delta \eta}$$

Tänu topeltvõrgule ja kirjeldatud divergentsi–gradiendi asendite vaheldumisele õnnestub efektiivselt suurendada sama väljapunktide arvu korral diferentsskeemi täpsust just nagu oleks kaks korda suurem väljapunktide tihedus (sisuliselt opereerime keskdiferentsidega, mistõttu skeemi ruumiline täpsus on II. järku täpsus). Mitte kõiki välju ei õnnestu (või pole otstarbekas mingitel muudel kaalutlustel) kirjeldatud klassikalise skeemi järgi sõlmedesse paigutada. HIRLAMi puhul on anomaalsed p ja φ. Sellisel juhul tuleb kas anomaalsetele (nihutatud) skalaarväljadele seada vastavusse ka anomaalsed (nihutatud) gradiendid või – mida tuleb sagedamini ette – tuleb eelnevalt keskmistades nihutada anomaalsed skaalarid rakukeskmetesse, mis (nagu igasugu keskmistamine) vähendab täpsust.

Tegelikult ei ole koordinaatsüsteemi kõveruse tõttu Δx, Δy sugugi konstandid. Horisontaalkoordinaadid merepinnal rahuldavad seoseid

$$x = a\cos\theta\lambda = h_\lambda(\theta)\lambda \ ,$$

$$y = a\theta = h_\theta\theta$$

mistõttu osakese $\{i, j, k\}$ tsentri geograafiline koordinaat on

$$x_{i,j} = h_{\lambda ij}\lambda_i \ , y_{i,j} = h_{\theta ij}\theta_j$$

(tegelikult on meetriliste koefitsientide sõltuvus indeksitest palju tagasihoidlikum: $h_{\lambda ij} \equiv h_{\lambda j} = a\cos\Theta_j$, $h_{\theta ij} \equiv h_\theta = a$) ning

$$\Delta x_{i+1/2,j} = x_{i+1,j} - x_{ij} = h_{\lambda ij}\Delta\lambda$$

$$\Delta y_{ij+1/2} = y_{ij+1} - y_{ij} = h_{\theta ij}\Delta\theta \ .$$

Horisontaalse gradiendi diferentskomponendid on seega

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i+1/2,jk} = \frac{A_{i+1,jk} - A_{ijk}}{\Delta x_{i+1/2,j}} \ , \quad \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{ij+1/2,k} = \frac{A_{ij+1,k} - A_{ijk}}{\Delta y_{i,j+1/2}} \ .$$

Kui nüüd tuua sisse standardne diferentsoperaatori tähis

$$\delta_\lambda F_{ijk} = (F_{i+1/2,jk} - F_{i-1/2,jk})/\Delta\lambda \ , \quad \delta_\theta F_{ijk} = (F_{ij+1/2,k} - F_{ij-1/2,k})/\Delta\theta$$

Siis on äsjadefineeritud gradiendi komponendid

$$\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i+1/2,jk} , \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{ij+1/2,k}\right\} = \left\{\frac{1}{h_{\lambda ij}}\delta_\lambda A_{i+1/2,jk} \ , \ \frac{1}{h_{\theta ij}}\delta_\theta A_{ij+1/2,k}\right\} \ .$$

Analoogiliselt, horisontaalne divergents esitub diferentsoperaatori kasutamisel

$$(\nabla\cdot\mathbf{v})_{ijk} = \left\{\frac{1}{h_\lambda h_\theta}\left[\frac{\partial\overline{h_\theta}u}{\partial\lambda} + \frac{\partial\overline{h_\lambda}v}{\partial\theta}\right]\right\}_{ijk} = \frac{1}{h_{\lambda ij}h_{\theta ij}}\left[\delta_\lambda(\overline{h_\theta}u)_{ijk} + \delta_\theta(\overline{h_\lambda}v)_{ijk}\right]$$

Siin diferentsvalem eeldab, et h_θ ja u on antud samas poolarvulise indeksiga $\{i{+}1/2, j, k\}$ punktis ning analoogiliselt, h_λ ja v on antud punktis $\{i, j+1/2, k\}$. Horisontaaljoon suuruse kohal tähendab siin ja edaspidi keskmistamist indekiga fikseeritud suunas:

$$\overline{F}^\lambda_{ijk} = \frac{F_{i-1/2,jk} + F_{i+1/2,jk}}{2}, \ \overline{F}^\theta_{ijk} = \frac{F_{ij-1/2,k} + F_{ij+1/2,k}}{2}, \ \overline{F}^\eta_{ijk} = \frac{F_{ijk-1/2,} + F_{ijk+1/2}}{2} \ .$$

Vertikaalse diferentsina kasutab HIRLAM definitsiooni

$$\Delta F_{ijk} = F_{ijk+1/2} - F_{ijk-1/2} \ ,$$

s.o. $\Delta\eta$–ga jäetakse läbi jagamata. See on tingitud sellest, et tegelikult vaadeldakse kõiki võrrandeid vertikaalsuunas lõigul $\Delta\eta$ integreerituna kaaluga m (kuidas see toimub, saame näha edaspidid).

Väljateoorias kasutatakse (jäävuste kontrollil jm.) samasust

$$\nabla\cdot(S\mathbf{V}) = S\nabla\cdot\mathbf{V} + \mathbf{V}\cdot\nabla S \ ,$$

kus S ja $\mathbf{V}$ on suvalised skaalar- ja vektroväli. Ühedimensionaalses ruumis, kus skaalar ja vektor ühtivad, taandub see päris tavaliseks funktsioonide korrutise diferentseerimise reegliks:

$$\frac{\partial SV}{\partial x} = S\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial S}{\partial x} \ . \qquad (*)$$

Aanaloogilised asjad on vajalikud ka diskreetsel juhul. Siin aga säilub jaotumus skaalriteks (täisarvuline indeks) ja vektoriteks (poolarvuline indeks) ka ühemõõtmelisel juhul. Seetõttu on paarisvõrgust tingituna kaks võimalust sõltuvalt sellest, kas soovime saada tulemuseks skaalarit või vektorit. Vaatame valemi (*) analooge mõlemal juhul koordinaadi λ suunal.

Divergents vektori ja skaalari korrutisest. Tähistan skaalari ja vektori vastavalt S_i ja $V_{i+1/2}$. Defineerin järgmised skaalarid

$$\delta_\lambda(\overline{S}V)_i = \frac{1}{\Delta\lambda}(\overline{S}_{i+1/2}V_{i+1/2} - \overline{S}_{i-1/2}V_{i-1/2})$$

$$(S\delta_\lambda V)_i = S_i\frac{V_{i+1/2} - V_{i-1/2}}{\Delta\lambda}$$

$$(\overline{V\delta_\lambda S})_i = \frac{1}{2}(V_{i-1/2}S_{i-1/2} + V_{i+1/2}S_{i+1/2})$$

Siis (*) skalaarne analoog on

$$\delta_\lambda(\overline{S}V)_i = (S\delta_\lambda V)_i + (\overline{V\delta_\lambda S})_i \ .$$

Skaalari ja vektori skalaarkorrutise gradient. Pideval juhul on raske leida selle diferentsvalemi analoogi, seal on vektori ja skaalari korrutis alati vektor ja selle gradient on tensor. Diskreetsel juhul aga on võimalik moodustada skaalari S_i ja vektori $V_{i+1/2}$ baasil skaalar $S_i(\overline{V})_i = S_i(V_{i-1/2} + V_{i+1/2})/2$ ja võtta sellest gradient.
Defineerides järgnevad vektorid

$$\delta_\lambda(S\overline{V})_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta\lambda}(S_{i+1}\overline{V}_{i+1} - S_i\overline{V}_i)$$

$$(\overline{S\delta_\lambda V})_{i+1/2} = \frac{1}{2}(S_i\delta_\lambda V_i + S_{i+1}\delta_\lambda V_{i+1})$$

$$(V\delta_\lambda S)_{i+1/2} = V_{i+1/2}\frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta\lambda}$$

saab kirjutada

$$\delta_\lambda(S\overline{V})_{i+1/2} = (\overline{S\delta_\lambda V})_{i+1/2} + (V\delta_\lambda S)_{i+1/2} \ .$$

§2. VERTIKAALNE DISKRETISEERIMINE

Igas kihis k loeme väljad vertikaalisihis ligikaudu konstantseks. Ainukesed suurused, mille puhul konstantsuse nõue on lubamatu, on konvektsiooni kirjeldavad liikmed $\dot\eta\frac{\partial X}{\partial\eta}$ (X – suvaline väli) kuna need sisaldavad vertikaaltuletisi, mis võivad kiiresti muutuda.

2.1 Pidevusvõrrand, vertikaalkiirus ja aluspinna rõhuvõrrand

Integreerime pidevusvõrrandi lõigul $[\eta_{k-1/2}, \eta_{k+1/2}]$. Saame

$$\frac{\partial\Delta p_k}{\partial t} = -\nabla\cdot(\mathbf{v}_k\Delta p_k) - \Delta(\dot\eta m)_k$$

kus

$$\Delta p_k = \int_{\eta_{k-12/}}^{\eta_{k+1/2}} m d\eta = \int_{\eta_{k-12/}}^{\eta_{k+1/2}} \frac{\partial p}{\partial\eta} d\eta = p_{k+1/2} - p_{k-1/2}$$

on (dimensiooniga konstandi täpsusega) gaasi mass kihi k ühikulise ristlõikega vertikaalsilindris, ehk, mis on ekvivalentne, selle silindri ruumala p–ruumis, ja

$$\Delta(\dot\eta m)_k = (\dot\eta m)_{k+1/2} - (\dot\eta m)_{k-1/2}\ .$$

$(\dot\eta m)_{k+1/2}$ määramiseks (olgu öeldud, et $\dot\eta$ ei esine HIRLAM mudelis kusagil ilma kordajata m) diskretiseerime pideva avaldise

$$m\dot\eta = \left(1 - \frac{\partial p}{\partial p_s}\right)\frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_\eta^1 \nabla\cdot(m\mathbf{v})d\eta$$

mis annab

$$(m\dot\eta)_{k+1/2} = (1 - B_{k+1/2})\frac{\partial p_s}{\partial t} + \sum_{k'=k+1}^{Nlev} \nabla\cdot(\mathbf{v}_{k'}\Delta p_{k'})\ ,\quad \text{kus}\quad 0\ \le\ k\ \le\ Nlev\ ,$$

ja $B_{k+1/2}$ on defineeritud p ja η vahelise üleminekuvalemiga (vt. eespool). Kuna $B_{1/2} = 0$, $B_{Nlev+1/2} = 1$, annab see valem aluspinna rõhuvõrrandi rahuldatuse eeldusel korrektsed ääretingimused vertikaalkiirusele

$$(m\dot\eta)_{1/2} = 0\ ,\qquad (m\dot\eta)_{Nlev1/2} = 0\ .$$

HIRLAMi algoritm rakendab vertikaalkiiruse leidmiseks rekurrentsi, mille saab, kui toodud valemist tasemel $k+1/2$ lahutada sama valem tasemel $k-1/2$:

$$(m\dot\eta)_{k-1/2} = (m\dot\eta)_{k+1/2} + \Delta B_k\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{v}_k\Delta p_k)\ .$$

Siit järeldub seos (mida HIRLAM skeem küll ilmutatult ei vaja)

$$\Delta(\dot{\eta} m)_k + \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Delta p_k) = -\Delta B_k \frac{\partial p_s}{\partial t} \ ,$$

mistõttu

$$\frac{\partial \Delta p_k}{\partial t} = \Delta B_k \frac{\partial p_s}{\partial t} \ .$$

Summeerides selle võrrandi k järgi 1-st $Nlev$-ini, kasutades asjaolu, et $\sum_1^{Nlev} \Delta B_k = 1$, ja võttes appi diskretiseeritud pidevusvõrrandi, saame

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{Nlev} \nabla \cdot (\Delta p_k \mathbf{v}_k) \ = \ -\frac{1}{h_\lambda h_\theta} \sum_{k=1}^{Nlev} \left[\frac{\partial h_\theta u_k \Delta p_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial h_\lambda v_k \Delta p_k}{\partial \theta} \right]$$

See on evolutsioonivõrrand aluspinna rõhule vertikaalselt diskretiseeritud mudelis. Samale tulemusele jõuame pideva juhu võrrandist

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \int_0^1 m\mathbf{v} d\eta$$

lähtudes. Eelnevaga ühtiva diskreetse võrrandi saame, kui loeme kihi k sees integrandi konstantseks.

2.2. Vertikaalse advektsiooni divergentne diferentsskeem

Vertikaalliikme $\partial(\dot{\eta} m)/\partial\eta$ diskretiseerimine määrab ka teiste võrrandite konvektsiooniliikmete diskretiseeringu vormi, mis peab säilitama bilansivõrrandeid võimaldava struktuuri.

Vaatlen võrrandi

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla X - \dot{\eta} \frac{\partial X}{\partial \eta} + A_x$$

baasil. See on toodav pidevusvõrrandi abil divergentsele kujule (bilansivõrrandiks)

$$\frac{\partial m X}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} m X) - \frac{\partial \dot{\eta} m X}{\partial \eta} + m A_X$$

Samasugune bilansikuju peaks säiluma ka diskreetsel juhul. X võrrandi vertikaalselt diskretiseeritud vorm on keskmistus η järgi üle kihi k

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = -\mathbf{v_k} \cdot \nabla X_k - (\dot{\eta} \frac{\partial X}{\partial \eta})_k + A_{Xk}$$

Divergentse bilansi saamiseks X_k–le korrutame selle võrrandi Δp_k–ga ja liidame talle X_k–ga korrutatud vertikaalselt diskretiseeritud pidevusvõrrandi:

$$\frac{\partial \Delta p_k X_k}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Delta p_k \mathbf{v_k} X_k) - \Delta p_k (\dot{\eta} \frac{\partial X}{\partial \eta})_k - X_k \Delta(m\dot{\eta})_k + A_{Xk}$$

Vastavalt püstitatud tingimusele peab olema

$$\Delta p_k(\dot\eta\frac{\partial X}{\partial\eta})_k - X_k\Delta(m\dot\eta)_k = \Delta(m\dot\eta X)_k$$

Siit järeldub üldine eeskiri

$$(\dot\eta\frac{\partial X}{\partial\eta})_k = \frac{1}{2\Delta_p}\left[(m\dot\eta)_{k+1/2}(X_{k+1}-X_k)+(m\dot\eta)_{k-1/2}(X_k-X_{k-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta p_k}\overline{(m\dot\eta\Delta F)}_k^\eta \ .$$

See on täiesti üldine algoritm. Tema kasutamisel saab horisontaalse liikumise ja temperatuurivõrrandi kirjutada kihtides k keskmistatuna kujul:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} \;=\; -\;(f+\xi_k)\mathbf{k}\times\mathbf{v}_k \;-\left(\dot\eta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\eta}\right)_k -\;\nabla(\varphi_k+E_k) - RT_k(\nabla\ln p)_k \;+\; \mathbf{F}_k$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = -\mathbf{v_k}\cdot\nabla T_k - \left(\dot\eta\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)_k + \left(\frac{\omega}{p}\frac{R}{C_p}T\right)_k + F_{Tk}\ ,$$

Et neid kasutada, peab oskama arvutada φ_k, $(\ln p)_k$ ja $(\omega/p)_k$ väärtusi nii, et diskreetses mudelis jääks kehtima pöördmomendi ja energiajäävusseadused.

2.3. Geopotentsiaali ja rõhu diskreetsed algoritmid

Geopotentsiaalivõrrand

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{RT}{p}m$$

on diferentsiaalides

$$d\varphi = -RT\,d\ln p$$

ja annab diferentsskeemi

$$\Delta\varphi_k = -RT_k\Delta(\ln p)_k$$

kus kooskõlaliselt vertikaaldiferentsi definitsiooniga

$$\Delta(\ln p)_k = \ln p_{k+1/2} - \ln p_{k-1/2} = \ln(p_{k+1/2}/p_{k-1/2})\ .$$

Toodud diferentsvõrrand on sisuliselt rekurrentsskeem (nii nagu kõik diferentsvõrrandid)

$$\varphi_{k-1/2} = \varphi_{k+1/2} + RT_k\Delta(\ln p)_k\ .$$

HIRLAMis on spetsiifiline algoritm kasutusel φ arvutamiseks vahepealsetel täisarvulistel tasemetel. Tavapärase $\overline{\varphi}_k^\eta$ asemel kasutatakse algoritmi

$$\varphi_k = \varphi_{k+1/2} + \alpha_k RT_k\ ,$$

kus

$$\alpha_k = 1 - \frac{p_{k-1/2}}{\Delta p_k}\Delta(\ln p)_k\ , \quad k = \overline{2, Nlev} \quad \text{ja} \quad \alpha_1 = \ln 2\ .$$

Kindlasti pakub huvi selle interpolatsioonivalemi saamine. Ta on kasutusele võetud SB poolt (1981) ECMWF mudelis ja HIRLAM on selle lihtviisil adapteerinud. Kasutades ära asjaolu, et p_k–de valikul on teatav vabadus, nõutakse, et pideva impulssmomendi bilansi juures kehtinud seos

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)\ m\ d\eta = -\varphi_s \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\int_0^1 \varphi \frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta$$

säiliks võimalikult ehedal kujul ka diskreetses mudelis:

$$\sum_{k=1}^{Nlev} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} + \frac{RT_k}{p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \lambda}\right)\Delta p_k = -\varphi_s \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\sum_{k=1}^{Nlev} \varphi_k \Delta p_k \qquad (*)$$

(NB! toodud valem ei ole diskreetsel juhul samaselt rahuldatud!). Et vajalikku tulemust saada, otsitakse vahetasemetel rõhulogaritmi kujul

$$(\ln p)_k = \ln p_{k+1/2} - \alpha_k$$

ning sellega kooskõlaliselt

$$\varphi_k = \varphi_{k+1/2} + \alpha_k (RT)_k$$

Seejuures seos φ–le põhitasemetel on standardne, nagu eespool (lk. 7) toodud, ja see arvutatakse poolarvuliste p väärtuste kaudu

$$\varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2} = -(RT)_k \ln(p_{k+1/2}/k_{k-1/2}).$$

Osutub aga, et kui need avaldised panna (*) vasemale poolele sisse, siis ka kõige paremal tahtmisel ei saa me parempoolset (ega isegi sellelähedase struktuuriga) avaldist. Seepärast SB lähendavad teist liiget vasemal poolel valemiga

$$\frac{RT_k}{p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \lambda}\Delta p_k \doteq RT_k \left(\Delta(\ln p)_k \frac{\partial p_{k-1/2}}{\partial \lambda} + \alpha_k \frac{\partial \Delta p_k}{\partial \lambda}\right) \qquad (**)$$

ja selle üldistusena lähendavad nad ka vastavat liiget liikumisvõrrandis

$$\left(\frac{RT}{p}\nabla p\right)_k = \frac{RT_k}{\Delta p_k}\left[\Delta(\ln p)_k \nabla p_{k-1/2} + \alpha_k \nabla \Delta p_k\right] \qquad (**')$$

Kui asendada (*) vasemal poolel teine liige (**) abil, saame φ_k ja $\varphi_{k+1/2}$ rekurrentsvalemeid rakendades ja pärast liikmete ümbergrupeerimisi täpselt (*) parema poole. Niisiis. peab rakendama approksimatsiooni (**) ja vastavalt kohendama ka (*) vasemat poolt:

$$\sum_{k=1}^{Nlev} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}\Delta p_k + RT_k \left(\Delta(\ln p)_k \frac{\partial p_{k-1/2}}{\partial \lambda} + \alpha_k \frac{\partial \Delta p_k}{\partial \lambda}\right)\right] = -\varphi_s \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\sum_{k=1}^{Nlev} \varphi_k \Delta p_k \qquad (***)$$

Muus suhtes on α valik vaba, st. niipea kui võtame omaks approksimatsiooni (**), hakkab PM seadus (***) kehtima igasuguse α korral. SB soovitavad α valida nii, et puhtal sigamakoordinaatmudelil ühtiks (*) tavapärase σ–mudeli avaldisega

$$\frac{RT_k}{p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \lambda}\Delta p_k = \frac{RT_k}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \lambda}\Delta p_k$$

Siin $p_s = p_{Nlev+1/2}$ on rõhk aluspinnal. Vajalikke tingimusi rahuldav avaldis α–le on seesama, mis juba varem sai toodud:

$$\alpha_k = 1 - \frac{p_{k-1/2}}{\Delta p_k}\Delta(\ln p)_k$$

Pannes selle (**')–sse, saame liikumisvõrrandi vastava liikme jaoks approksimatsiooni

$$\left(\frac{RT}{p}\nabla p\right)_k = RT_k\nabla\left[\frac{p_{k+1/2}\ln p_{k+1/2} - p_{k-1/2}\ln p_{k-1/2}}{\Delta p_k}\right]$$

ning järeldusena

$$(\ln p)_k = \frac{p_{k+1/2}\ln p_{k+1/2} - p_{k-1/2}\ln p_{k-1/2}}{\Delta p_k} - 1$$

Siin –1 avaldise lõpus on integreerimiskonstant, mis garanteerib õige piirväärtuse $\Delta p_k \to 0$ korral.

2.4. Temperatuurivõrrandi energiavahetusliige

Jutt on liikme

$$\left(\frac{R}{C_p}\,\frac{T\omega}{p}\right)_k = \kappa_k\; T_k\left(\frac{\omega}{p}\right)_k$$

diskreetsest kujust (ligikaudsest väärtusest tasemel k). Selle suuruse diferentsanaloogi saamisel lähtume energiajäävuse seadusest ja nõuame, et kineetilise ja potentsiaalse energia bilanss oleks tasakaaluline. Vajaliku tingimuse saime juba pideval juhul ja diskreetsete liikumis- ja temperatuurivõrrandi (vt. lk. 6) võrdlus pideva juhuga näitab, et analoogiliselt pideva juhuga on vajalik suuruse

$$B = -\Delta p_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla\varphi_k + \Delta p_k RT_k\left(\frac{\omega}{p}\right)_k - \Delta p_k RT_k \mathbf{v}_k \cdot \nabla(\ln p)_k$$

redutseeritavus täisdivergentsiks, s.o. kujule

$$B = \nabla \cdot \mathbf{a}_k + \Delta b_k\ .$$

Mängida selle eesmärgi saavutamiseks saame ainult $(\omega/p)_k$ valikuga, kõik teised suurused on juba paika pandud. Seejuures lähtume tema täpsest pidevast kujust

$$\frac{\omega}{p} = \frac{1}{p}\left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p + \int_\eta^1 \nabla\cdot(m\mathbf{v})d\eta'\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_\eta^1 \nabla\cdot(m\mathbf{v})d\eta'\right] + \mathbf{v}\cdot\nabla\ln p$$

Osutub, et sihileviiv on siin lähenduse kasutamine

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)_k = \frac{\Delta(\ln p)_k}{\Delta p_k}\left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + \sum_{k'=k+1}^{Nlev}\nabla\cdot(\Delta p_{k'}\mathbf{v}_{k'})\right] + \frac{\beta_k}{\Delta p_k}\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k) + \mathbf{v}_k\cdot\nabla(\ln p)_k$$

kus

$$\beta_k = \Delta(\ln p)_k - \alpha_k\ .$$

See on Manuali esitusviis. Kui asendada siin $\partial p_s/\partial t$ aluspinna rõhu tendentsivõrrandist, saame alternatiivkuju

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)_k = -\frac{\Delta(\ln p)_k}{\Delta p_k}\sum_{k'=1}^{k-1}\nabla\cdot(\Delta p_{k'}\mathbf{v}_{k'}) - \frac{\alpha_k}{\Delta p_k}\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k) + \mathbf{v}_k\cdot\nabla(\ln p)_k$$

Veendume, et see esitus toob suuruse B täisdivergentsele kujule. Selleks teisendame äsjatoodud valemi abil kaht viimast liiget B avaldises nii:

$$\Delta p_k(RT)_k\left(\frac{\omega}{p}\right)_k - \Delta p_k(RT)_k\mathbf{v}_k\cdot\nabla(\ln p)_k =$$

$$-(RT)_k\Delta(\ln p)_k\sum_{k'=1}^{k-1}\nabla\cdot(\Delta p_{k'}\mathbf{v}_{k'}) - (RT)_k\alpha_k\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k)$$

Kui kasutada siin $\ln p$ ja α avaldamiseks φ rekurrentse (vt.kaks viimast valemit lk (7)), saame edasi teisendada

$$= A_k\Delta\varphi_k + \varphi_{k+1/2}\Delta A_k - \varphi_k\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k)$$

kus

$$A_k = \sum_{k'=1}^{k-1}\nabla\cdot(\Delta p_{k'}\mathbf{v}_{k'})$$

Lihtne on kontrollida, et kehtib

$$A_k\Delta\varphi_k + \varphi_{k+1/2}\Delta A_k = \Delta b_k\ ,$$

kus b on vektor–tüüpi (poolarvulise indeksiga võrgul defineeritud) suurus

$$b_{k+1/2} = A_{k+1}\varphi_{k+1/2} = \varphi_{k+1/2}\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k).$$

Seega oleme saanud lihtsa valemi (sobib nii "algebra" jaoks kui ka tegelikuks ω– liikme arvutuseks)

$$\Delta p_k(RT)_k\left(\frac{\omega}{p}\right)_k - \Delta p_k(RT)_k\mathbf{v}_k\cdot\nabla(\ln p)_k = \Delta b_k - \varphi_k\nabla\cdot(\Delta p_k\mathbf{v}_k)$$

Pannes selle tulemuse B avaldisse, saame

$$B = \Delta b_k - \nabla\cdot(\Delta p_k\varphi_k\mathbf{v}_k)\ ,$$

Niisiis, B on tõesti täisdivergents.

Sellega on vertikaalne diskretiseerimine lõpule viidud.

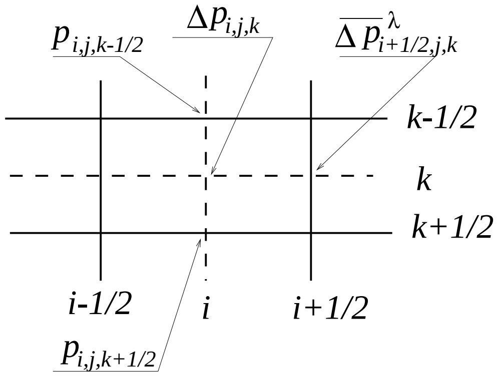
§3. HORISONTAALNE DISKRETISEERIMINE

3.1. Aluspinna rõhuvõrrand, pidevusvõrrand ja vertikaalkiirus

Aluspinna rõhutendentsi võrrandi saime vertikaalis diskretiseeritult kujul

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{Nlev} \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \Delta p_k) \ = \ -\frac{1}{h_\lambda h_\theta} \sum_{k=1}^{Nlev} \left[\frac{\partial h_\theta u_k \Delta p_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial h_\lambda v_k \Delta p_k}{\partial \theta} \right]$$

Kui tahame minna diskreetsele kujule ka horisontaalsuunas, peame siin interpoolima Δp_k rakutsentrist tema külgtahkudele, kus paiknevad u ja v väärtused



Joon. 5

Valemite selgituseks. Δp ja tema λ–sihis interpoolitud väärtus $\overline{\Delta p}^{\lambda}$.

Kui tuua sisse abivektorid

$$U_{i+1/2,jk} = \overline{(\Delta p)}^{\lambda}_{i+1/2,jk} u_{i+1/2,jk} \ , \quad V_{ij+1/2,k} = \overline{(\Delta p)}^{\theta}_{ij+1/2,k} u_{ij+1/2,k} \ ,$$

saab täielikult diskretiseeritud aluspinna rõhuvõrrandi kirjutada

$$\frac{\partial p_{sij}}{\partial t} \ = \ -\sum_{k=1}^{Nlev} (\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk} \ ,$$

kus

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk} = \frac{1}{(h_\lambda h_\theta)_{ij}} \left[\delta_\lambda (h_\theta U)_{ijk} + \delta_\theta (h_\lambda V)_{ijk} \right] \ .$$

Peab ütlema (sellest oli juba juttu ka eespool), et niisugune määrang rikub sümmeetriaid, kuna läbi on korrutatud erineva võrgustiku objektid h ja $\mathbf{V}$. Viga see ei põhjusta ja h–de aeglase muutumise tõttu ei ole ka oluline, aga tegelikult peaksid selles võrrandis olema ka h_λ ja h_θ keskmistatud poolarvulisele võrgule. Näiteks võiks seda kenasti teha defineerides abivektorid

$$U^*_{i+1/2,jk} = \overline{(h_\theta \Delta p)}^{\lambda}_{i+1/2,jk} u_{i+1/2,jk} \ , \quad V^*_{ij+1/2,k} = \overline{(h_\lambda \Delta p)}^{\theta}_{ij+1/2,k} u_{ij+1/2,k} \ .$$

Pidevusvõrrandi kolmemõõtmeliselt diskretiseeritud vorm tuleb valida eelnevaga kooskõlaliselt. Vertikaalis oli see võrrand juba diskretiseeritud ja siin midagi ei muutu, horisontaalis tuleb aga $\nabla \cdot (\Delta p_k \mathbf{v}_k)$ asendada äsjadefineeritud diskreetse analoogiga $(\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk}$:

$$\frac{\partial \Delta p_{ijk}}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk} - \Delta(\dot{\eta} m)_{ijk}$$

Korrutades selle läbi $(h_\theta h_\lambda)_{ijk}$–ga, saan pidevuvõrrandi nn. "tihedusele" π, mida (ja mille mitmesuguseid variatsioone) on vaja energiabilansi käsitlemisel

$$\frac{\partial \pi_{ijk}}{\partial t} = -\delta_\lambda (h_\theta U)_{ijk} - \delta_\theta (h_\lambda V)_{ijk} - \Delta(h_\lambda h_\theta \dot{\eta} m)_{ijk}$$

kus

$$\pi_{ijk} = (h_\lambda h_\theta)_{ij} \Delta p_{ijk} \ .$$

Vertikaalse kiiruse avaldis

$$m\dot{\eta} = \left(1 - \frac{\partial p}{\partial p_s}\right) \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_\eta^1 \nabla \cdot (m\mathbf{v}) d\eta$$

annab eelnevaga analoogiliselt

$$(m\dot{\eta})_{ijk+1/2} = (1 - B_{k+1/2}) \frac{\partial p_{sij}}{\partial t} + \sum_{k'=k+1}^{Nlev} (\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk'} \ , \quad \text{kus} \quad 0 \ \le \ k \ \le \ Nlev \ ,$$

ja $B_{k+1/2}$ on defineeritud p ja η vahelise üleminekuvalemiga (vt. eespool). Kuna $B_{1/2} = 0$, $B_{Nlev+1/2} = 1$, annab see valem (aluspinna rõhuvõrrandi rahuldatuse eeeldusel) automaatselt

$$(m\dot{\eta})_{ij,1/2} = 0 \ , \qquad (m\dot{\eta})_{ij,Nlev+1/2} = 0 \ .$$

HIRLAMi algoritm rakendab rekurrentsi, mille saab, kui toodud valemist $m\dot{\eta}$–le tasemel $k + 1/2$ lahutada sama valem tasemel $k - 1/2$:

$$(m\dot{\eta})_{ij,k-1/2} = (m\dot{\eta})_{ij,k+1/2} + \Delta B_k \frac{\partial p_{sij}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V})_{ijk} \ .$$

3.2. Skaalari advektsioon, temperatuurivõrrand

Vaatame skaalari advektsiooni vastavalt võrrandile (vertikaalis juba diskretiseerimine tehtud)

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = -\mathbf{v}_k \cdot \nabla X_k - \left(\dot{\eta} \frac{\partial X}{\partial \eta}\right)_k$$

kus vertikaalne liige on eespol juba paika pandud ja on siin vaid metodoloogilistel kaalutlustel (et ei peaks pidevusvõrrandit vertikaalliikme osas nudima hakkama). Et skaalar on antud täisarvulise indeksiga sõlmedes, siis näeb täis-diskreetne võrrand välja nimoodi:

$$\frac{\partial X_{ijk}}{\partial t} = -\left(\mathbf{v}\cdot\nabla X\right)_{ijk} - \left(\dot{\eta}\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)_{ijk} \qquad (*)$$

ja kogu probleem on taandunud liikme $(\mathbf{v}_k\cdot\nabla X_k)_{ij}$ õigele käsitlusele. Võtame selle avaldise tuletamisel taas aluseks X bilansivõrrandi divergentse vormi säilumise horisontaalsel diskretiseerimisel. Käsitlus on täiesti analoogiline vertikaalsel juhul arendatud mõttekäikudega. Nimelt nõuame, et X bilansi diskreetne kuju tuleks eeltoodud võrrandist lähtuvalt

$$\frac{\partial \Delta p_{ijk}X_{ijk}}{\partial t} = -[\nabla\cdot(\mathbf{V}X)]_{ijk} - \Delta(m\dot{\eta}X)_{ijk} \qquad (**)$$

Siin

$$[\nabla\cdot(\mathbf{V}X)]_{ijk} = \frac{1}{(h_\theta h_\lambda)_{ij}}\left[\delta_\lambda(h_\theta U\overline{X}^\lambda)_{ijk} + \delta_\theta(h_\lambda V\overline{X}^\theta)_{ijk}\right]$$

(mitte unustada et U ja V on Δp-ga läbi korrutatud kiirus!).

Kui liita Δp_{ijk}–ga korrutatud võrrandile (*) X_{ijk}–ga korrutatud (diskreetne) pidevusvõrrand, siis saame avaldise, mille võrdlemine (**)–ga näitab, et divergentse advektsiooni kuju säilumiseks peab olema

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla X)_{ijk} = \frac{1}{\Delta p_{ijk}}\left[[\nabla\cdot(\mathbf{V}X)]_{ijk} - X_{ijk}(\nabla\cdot\mathbf{V})_{ijk}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta p_{ijk}(h_\lambda h_\theta)_{ijk}}\left[\delta_\lambda(h_\theta U\overline{X}^\lambda)_{ijk} + \delta_\theta(h_\lambda V\overline{X}^\theta)_{ijk}\right]$$

$$-\frac{X_{ijk}}{\Delta p_{ijk}(h_\lambda h_\theta)_{ijk}}\left[\delta_\lambda(h_\theta U)_{ijk} + \delta_\theta(h_\lambda V)_{ijk}\right]$$

Sarnaste liikmete ühtekorjamine annab lõplikuks tulemuseks

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla X)_{ijk} = \frac{1}{\Delta p_{ijk}(h_\lambda h_\theta)_{ijk}}\left[\left(\overline{h_\theta\overline{\Delta p}^\lambda u\delta_\lambda X}^\lambda\right)_{ijk} + \left(\overline{h_\lambda\overline{\Delta p}^\theta v\delta_\theta X}^\theta\right)_{ijk}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta p_{ijk}(h_\lambda h_\theta)_{ijk}}\left[\left(\overline{h_\theta U\delta_\lambda X}^\lambda\right)_{ijk} + \left(\overline{h_\lambda V\delta_\theta X}^\theta\right)_{ijk}\right]$$

Temperatuurivõrrand. Saadud advektsiooniliikme esitus lubab kirjutada temperatuurivõrrandi (vt lk. 6) üsna traditsioonilises vormis:

$$\{ijk\}: \qquad \frac{\partial(T)}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla T) - \left(\dot{\eta}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{RT}{C_p}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right) + (F_T)\ .$$

Kogu nipp on selles, et kõik ümarsulgudes olevad suurused tuleb arvutada vastavalt eespool kirjeldatud spetsiaalsetele diferentsalgoritmidele. Olen siin kasutanud lühendatud indekseerimist, markeerides võrrandi ees punkti indeksi, mille on esitatud kõik ümarsulgudes olevad avaldised. Nii näiteks

$$\{ijk\}: \quad \left(\frac{RT}{C_p}\right) \equiv \frac{R_{ijk}T_{ijk}}{C_{pijk}} \ .$$

Edasiseks energiabilansi analüüsiks on soovitav esitada temperatuurivõrrand "tihedusega"

$$\pi_{ijk} = (h_\lambda h_\theta \Delta p)_{ijk}$$

ning teguriga C_{pijk} läbikorrutatult kujul

$$\{ijk\}: \qquad (\pi C_p)\frac{\partial (T)}{\partial t} = -(\pi C_p)\left[(\mathbf{v}\cdot\nabla T) + \left(\dot{\eta}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)\right] + (B^\omega) + (F_T) \ .$$

kus b^ω esitub kooskõlas p. 2.4 (vt lk. 12) tulemustega kujul

$$\{i,j,k\}: \quad (B^\omega) = (RT)\,(\pi)\left(\frac{\omega}{p}\right) = \Delta(h_\theta h_\lambda b_k) +$$

$$(RT\Delta p)\left[h_\theta\overline{u\delta_\lambda(\ln p)}^\lambda + h_\lambda\overline{v\delta_\theta(\ln p)}^\theta\right] - (\varphi)\left[\delta_\lambda(u\overline{h_\theta\Delta p}^\lambda) + \delta_\theta(v\overline{h_\lambda\Delta p}^\theta)\right]$$

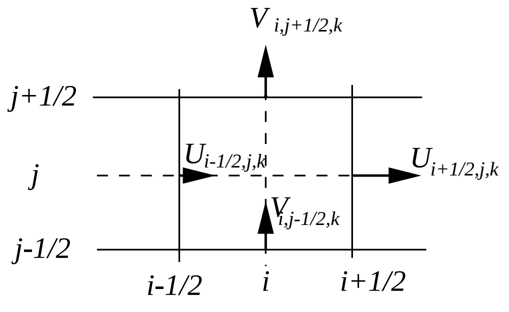
3.3. Kiirusvälja võrrand

Selle saamiseks kirjutame kiirusvälja vektorvõrrandi k–ndas kihis (vt. lk 6) komponentides, kasutades I osa p. 2.3–s toodud malli (I osa, lk.17):

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = [(f+\xi)v]_k - \frac{1}{\Delta p_k}\left(\overline{m\dot{\eta}\Delta u}^\eta\right)_k - \frac{1}{h_\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi+E)_k + (RT)_k\frac{\partial(\ln p)_k}{\partial\lambda}\right] + F_{\lambda k} \ .$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = -[(f+\xi)u]_k - \frac{1}{\Delta p_k}\left(\overline{m\dot{\eta}\Delta v}^\eta\right)_k - \frac{1}{h_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi+E)_k + (RT)_k\frac{\partial(\ln p)_k}{\partial\theta}\right] + F_{\theta k} \ .$$

Tegemist on igas kihis k kahemõõtmeliste väljadega, mis on λ, θ funkstsioonid. Seejuures on u ja v teada–olemas igas suvalises punktis, s.t. – nad on korraga antud ühes ja samas ruumipunktis. Horisontaalselt diskretiseerituna on nad aga antud erinevates ruumipunktides, indeksitega vastavalt $i+1/2, j, k$ ja $i, j+1/2, k$ (vt. joon. 6).



Joon. 6

Kiiruskomponentide võrrandite diskretiseerimine horisontaalis. Kiiruse komponendid on lahku nihutatud. Samades punkides tuleb anda ka kiirenduste ja jõudude komponendid.

See lahkunihutamine teeb vektorvõrrandite diskreriseerimisalgoritmi skaalarvõrrandi juhuga võrreldes tunduvalt keerulisemaks. Horisontaalne diskretisseerimine **v** komponentidele tuleb teha nii, et jääks kehtima kineetilise energia bilanss. See tähendab kolme asja:
(1) kineetilise energia advektsioon ja konvektsioon peavad olema divergentsed, s.o., esituma mingi voo divergentsina;
(2) Coriolise jõud ei tohi teha tööd;
(3) kineetilise energia produktsioon peab olema tasakaalus entalpia muutumisega.

Et aga kineetiline energia on moodustatud poolarvulise indeksiga suurustest, siis võib ta paikneda (sõltuvalt kasutatavast diskreetsest algoritmist) entalpia suhtes nihutatult ja bilansi saamiskes tuleb samadesse punktidesse interpoolida ka tiheduse analoog Δp ja selle võrrand. Nii toimivad Haltiner ja Williams (1980) (Edaspidi HW). Näiteks on neil u võrrandi tendentsiliige (HW, lk. 232)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta P^u_{i+1/2,j,k} u_{i+1/2,j,k}\right) = ...$$

kus tiheduse rollis on

$$\Delta P^u_{i+1/2,j,k} = \left(\overline{\overline{h_\theta h_\lambda \Delta p}^{\lambda\theta}}^{\theta}\right)_{i+1/2,j,k}$$

Siin sisemine kahesuunaline keskmistus annab suuruse, mille mõlemad horisontaalindeksid on poolarvulised, $\{i+1/2, j+1/2\}$, teine keskmistus toob aga selle suuruse taas täisarvulisele teisele indeksile j, s.o. – täpselt sinna, kus paikneb u. Kokku on selle tiheduse puhul tegu keskmistusega üle kuue naaberpunkti. Et lihtsustada bilansi analüüsi, kasutavad HW (lk. 235) samasust

$$\frac{\partial \Delta P^u u^2/2}{\partial t} = u\frac{\partial \Delta P^u u}{\partial t} - \frac{u^2}{2}\frac{\partial \Delta P^u}{\partial t}$$

Analoogiliselt, v jaoks defineeritakse tolle asukohas paiknev tihedusfunktsioon

$$\Delta P^v_{i,j+1/2,k} = \left(\overline{\overline{h_\theta h_\lambda \Delta p}^{\lambda\theta}}^{\lambda}\right)_{i,j+1/2,k}$$

Kuna nende tiheduste evolustioonivõrrandid tuleb analoogiliste keskmistustega tuletada Δp võrrandist, on kogu käsitlus küllalt kohmakas.

HIRLAMis on mindud teist teed ja defineeritud kineetiline energia skaalarina

$$E_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{\theta ij}}\left(\overline{u^2 h_\theta}^{\lambda}\right)_{ijk} + \frac{1}{h_{\lambda ij}}\left(\overline{v^2 h_\lambda}^{\theta}\right)_{ijk}\right] .$$

Nende skeemi puhul bilansivõrrandi tuletamisel E–le ei tule keskmistada Δp võrrandit, see–eest aga tuleb keskmistada u ja v võrrandeid.

Toon siin, peale seda üldist juttu, vastavad liikumisvõrrandid nii nagu nad on HIRLAMi skeemis (Manual, lk. 2.9 – 2.10).

$$\{i{+}1/2, j, k\}: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\overline{h_\lambda}^{\lambda}} \overline{Z}^{\theta} \overline{V h_\lambda}^{\lambda\theta} - \frac{1}{\overline{h_\lambda}^{\lambda}} \left[\delta_\lambda(\varphi + E) + \overline{RT}^{\lambda} \delta_\lambda \ln p \right] - \frac{1}{\overline{\Delta p}^{\lambda}} \overline{\overline{m\dot{\eta}}^{\lambda} \Delta u}^{\eta} + F_\lambda ,$$

$$\{i, j{+}1/2, k\}: \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\overline{h_\theta}^{\theta}} \overline{Z}^{\lambda} \overline{U h_\theta}^{\lambda\theta} - \frac{1}{\overline{h_\theta}^{\theta}} \left[\delta_\theta(\varphi + E) + \overline{RT}^{\theta} \delta_\theta \ln p \right] - \frac{1}{\overline{\Delta p}^{\theta}} \overline{\overline{m\dot{\eta}}^{\theta} \Delta v}^{\eta} + F_\theta ,$$

kus

$$\{i+1/2, j+1/2, k\}: \qquad Z = \frac{1}{\overline{h_\lambda h_\theta \Delta p}^{\lambda\theta}} \left[\overline{f h_\lambda h_\theta}^{\lambda\theta} + \delta_\lambda(\overline{h_\theta}^{\theta} v) - \delta_\theta(\overline{h_\lambda}^{\lambda} u) \right]$$

Kommentaar. Analüüsima ma toodud HIRLAM-võrranded u–le ja v–le praegu ei hakka, minu kogemust mööda ei ole nende tuletamisel kuigivõrd järjekindlalt kinni peetud topeltvõrgu skaalar–vektor loogikast. Vahetud katsed tuletada siit korrektset energiabilanssi ei ole olnud edukad. Kuni ei ole originaalallikaid, kus valitud skeem oleks selgitatud ja kommenteeritud, peame leppima asjadega nii nagu nad on (numbriline skeem ju töötab). Juhin vaid tähelepanu mõnele vastuolulisusele (minu arvates). Selleks, et toodud võrranitele ehitada korrektne energiabilanss, tuleb nad eelnevalt läbi korrutada "tiheduse" π mingi täisdikreetse analoogiga. Toodud võrrandite vaatlus näitab, et selliseid tihedusi on (analoogiliselt HW mudeliga) kaks

ja nad on vastavalt

$$\{i + 1/2, j, k\} \ : \quad \pi^{u*} = \overline{h_\lambda}^{\lambda} \ \overline{h_\theta}^{\lambda} \ \overline{\Delta p}^{\lambda} \ ,$$

$$\{i, j + 1/2, k\} \ : \quad \pi^{v*} = \overline{h_\lambda}^{\theta} \ \overline{h_\theta}^{\theta} \ \overline{\Delta p}^{\theta} \ .$$

(indeks * on selleks, et edaspidi mitte segi minna analoogiliste ilma tärnita suurustega). Minu arusamist mööda on võimatu saada nii defineeritud tihedustele korrektset pidevusvõrrandit. Selleks, et saada korrektset energiabilanssi, peaks defineerima uued (ligikaudsed) pidevusvõrrandid mis ei ole saadavad täpse π–võrrandi keskmistustena, kuna

$$\pi^{u*} \neq \overline{\pi}^{\lambda} \ , \quad \pi^{v*} \neq \overline{\pi}^{\theta} \ .$$

Niisiis, korraga oleks kasutusel kolm esinevat, üksteisega mitteseotud tiheduse määrangut: üks skaalarväljadele ja üks kummalegi kiirusvälja komponendile.

3.4. Alternatiivne diskretiseerimisskeem kiirusvõrrandeile

Illustreerimaks kuidas minu arvates korrektne horisontaalne diskretiseerimine toimuma peaks, ja et anda aimu, milliseid asjaolusid ja fakte tuleb seejuures silmas pidada, toon järgnevas ühe skeemi, mida üldjoontes samal kujul on kasutatud numbriliste mesomudelite NH3D ja NHAD (mõlemad olemas Tõraveres) puhul. Arvan selle olevat lihtsaima ja loogiliselt kõige korrektsema.

Korrektne energiabilanss on kõige järgneva aluseks. Totaalne energia kujutab (I osa, lk. 17) integraali

$$\mathbf{E} = \int_S dS \int_0^1 d\eta \; m\mathcal{E} = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta h_\lambda h_\theta \int_0^1 d\eta \; m\mathcal{E}$$

Diskretiseeritult vastab sellele summa

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{Nlev} \sum_{i=1}^{Nlam} \sum_{j=1}^{Nthet} h_{\lambda ij} h_{\theta ij} \Delta p_{ijk} \mathcal{E}_{ijk}$$

või midagi analoogilist (võimalikud on keskmistused üle üksikute korrutiseliikmete). Tähtis on, et siin esineb energiatiheduse ees tegurina tiheduse rollis suurus $h_{\lambda ij} h_{\theta ij} \Delta p_{ijk}$ ja kui rakendame energiale ajatuletist, siis mõjub see ka sellele tegurile. Sii järeldub, et bilansivõrrandite tuletamisel on kohe soovitatav lähtuda õige tulemuse saamiseks vormist, kus "tihedus" $h_\lambda h_\theta \Delta p$ on vertikaalselt diskretiseeritud versioonis kui mitte ajatuletise alla sisse viidud, siis ajatuletise ette tegurina küll. Niisiis, korrutame lk 16 alguses toodud kiiruskomponentide võrrandid suurusega $h_\lambda h_\theta \Delta p$:

$$\begin{aligned}
h_\lambda h_\theta \Delta p_k \frac{\partial u_k}{\partial t} &= h_\lambda h_\theta \Delta p_k [(f+\xi)v]_k - h_\lambda h_\theta \left(\overline{m\dot{\eta}\Delta u}^{\eta}\right)_k \\
&- h_\theta \Delta p_k \left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(\varphi + E)_k + (RT)_k \frac{\partial (\ln p)_k}{\partial \lambda}\right] + h_\lambda h_\theta \Delta p_k F_{\lambda k} \; . \\
h_\lambda h_\theta \Delta p_k \frac{\partial v_k}{\partial t} &= - h_\lambda h_\theta \Delta p_k [(f+\xi)u]_k - h_\lambda h_\theta \left(\overline{m\dot{\eta}\Delta v}^{\eta}\right)_k \\
&- h_\lambda \Delta p_k \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi + E)_k + (RT)_k \frac{\partial (\ln p)_k}{\partial \theta}\right] + h_\lambda h_\theta \Delta p_k F_{\theta k} \; .
\end{aligned}$$

Horisontaalsel diskretiseerimisel pevad need avaldised üle minema vektorobjektideks asukohaga vastavalt $\{i+1/2, j, k\}$ ja $\{i, j+1/2, k\}$. Selleks tuleb vektorid lasta olla seal, kus nad on, skaalartegurid tuleb aga keskmistamise abil "vektoriseerida", s.o., nihutada poolarvulise indeksiga sõlmedesse.

See annab:

$$\begin{aligned}
i+1/2, j, k: \quad \pi^u \frac{\partial u}{\partial t} &= \overline{h_\lambda h_\theta \Delta p [(f+\xi)\overline{v}^{\theta}]}^{\lambda} - \overline{\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^{\lambda} \Delta u}^{\eta} \\
&- \overline{h_\theta \Delta p}^{\lambda} \delta_\lambda (\varphi + E) - \overline{h_\theta \Delta p RT}^{\lambda} \delta_\lambda (\ln p) + \pi^u F_\lambda \; . \\
i, j+1/2, k: \quad \pi^v \frac{\partial v}{\partial t} &= - \overline{h_\lambda h_\theta \Delta p [(f+\xi)\overline{u}^{\lambda}]}^{\theta} - \overline{\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^{\theta} \Delta v}^{\eta}
\end{aligned}$$

$$- \overline{h_\lambda \Delta p}^\theta \delta_\theta(\varphi + E) - \overline{h_\lambda \Delta pRT}^\theta \delta_\theta(\ln p) \ + \pi^v F_\theta \ .$$

kus

$$\pi^u_{i+1/2,j,k} = \overline{h_\lambda h_\theta \Delta p}^\lambda_{i+1/2,j,k} \quad \pi^v_{i,j+1/2,k} = \overline{h_\lambda h_\theta \Delta p}^\theta_{i,j+1/2,k}$$

Pange tähele: $f + \xi$ Coriolise jõu koosseisus eeldatakse olevat skaalar (rakutsentris). Sinna nihutatakse ka vastavad kiiruskomponendid selle jõu avaldistes ja alles seejärel nihutatakse kogu kupatus vastavasse vektori sõlme asukohta.

Saadud võrrandid ongi otsitavad lõpvõrrandid. Tarvis on aga ikkagi veenduda, et tegu on ka energeetiliselt korrektse skeemiga. Tuletame esmalt abivõrrandid tihedustele π^u ja π^v. Selleks korrutame diskretiseeritud pidevusvõrrandi (lk. 14 alguses) $h_\lambda h_\theta$–ga ja keskmistame ("vektoriseerime") vastavalt suundades λ ja θ:

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad \frac{\partial \pi^u}{\partial t} = -\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\lambda - \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\lambda - \Delta(\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\lambda)$$

$$\{i, j+1/2, k\}: \qquad \frac{\partial \pi^v}{\partial t} = -\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\theta - \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\theta - \Delta(\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\theta)$$

Kui siin korrutame esimese tihedusvõrrandi $u^2/2$–ga kohal $i+1/2, j, k$ ja liidame selle u–ga korrutatud u võrrandile, siis saame kineetilise energia u–komponendile bilansi

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad \frac{\partial}{\partial t}\pi^u \frac{u^2}{2} = C^u - B^{uC} - B^{uA} - B^{u\varphi} - B^{up} + u\pi^u F_\lambda \ .$$

Analoogiliselt

$$\{i, j+1/2, k\}: \qquad \frac{\partial}{\partial t}\pi^v \frac{v^2}{2} = -C^v - B^{vC} - B^{vA} - B^{v\varphi} - B^{vp} + v\pi^v F_\theta \ .$$

Siin Coriolise jõu poolt arendatav võimsus kirjeldub liikmetega

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad C^u = u(\overline{h_\lambda h_\theta \Delta p[(f+\xi)\overline{v}^\theta]}^\lambda) \ ,$$

$$\{i, j+1/2, k\}: \qquad C^v = v(\overline{h_\lambda h_\theta \Delta p[(f+\xi)\overline{u}^\lambda]}^\theta) \ ,$$

järgmised kaks liiget kirjeldavad kineetilise energia konvektsiooni ja advektsiooniga seotud kineetilise energia transporti

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad B^{uC} = u\overline{\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\lambda \Delta u}^\eta + \frac{u^2}{2}\Delta(\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\lambda)$$

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad B^{uA} = u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda \delta_\lambda E + \frac{u^2}{2}\left(\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\lambda + \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\lambda\right)$$

$$\{i, j+1/2, k\}: \qquad B^{vC} = v\overline{\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\theta \Delta v}^\eta + \frac{v^2}{2}\Delta(\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\theta)$$

$$\{i,j+1/2,k\}: \qquad B^{vA} = v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta \delta_\theta E + \frac{v^2}{2}\left(\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\theta + \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\theta\right)$$

ja lõpuks on liikmed, mis kirjeldavad rõhujõudude tööd (F–liikmeid ei pruugi siinses kontekstis olla ja neid ei ole ka tarvis analüüsida).

$$\{i+1/2,j,k\}: \qquad B^{u\varphi} = u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda \delta_\lambda \varphi\ , \qquad B^{up} = u\overline{h_\theta \Delta p RT}^\lambda \delta_\lambda(\ln p)$$

$$\{i,j+1/2,k\}: \qquad B^{v\varphi} = v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta \delta_\theta \varphi\ , \qquad B^{vp} = v\overline{h_\lambda \Delta p RT}^\theta \delta_\theta(\ln p)$$

Analüüsime saadud bilansse.

Coriolise jõuga seotud liikmete kadumine. C^u ja C^v kompenseeruvad naaberpunktides. Et selles veenduda, on mugav kasutada samasust

$$\sum_i V_{i+1/2}\overline{S}_{i+1/2} = \sum_i S_i \overline{V}_i$$

Siin võivad otstes küll tekkida vasema poole ümbergrupeerimisel kompenseerimata liikmed, aga neid ei ole näiteks, kui vektor ja skaalar muutuvad summeerimispiirkonna otstes nulliks. Sel juhul on tõesti samasus, muudel juhtudel saame aga ikkagi rääkida kahe esituse samaväärsusest (ekvivalentsusest) summeerimisel üle sisepunktide, tähistades seda niimoodi:

$$V_{i+1/2}\overline{S}_{i+1/2} \doteq S_i \overline{V}_i \qquad (*)$$

Selle ekvivalentsusseose abil saame kirjutada

$$C^u_{i+1/2,j,k} \doteq \overline{u}^\lambda_{ijk}[h_\lambda h_\theta \Delta p(f+\xi)]_{ijk}\overline{v}^\theta_{ijk}\ , \quad C^v_{i,j+1/2,k} \doteq \overline{v}^\theta_{ijk}[h_\lambda h_\theta \Delta p(f+\xi)]_{ijk}\overline{u}^\lambda_{ijk}$$

millest on näha, et C^u - $C^v \doteq 0$ tõepoolest vähemalt kõigis sisepunktides.

Kineetilise energia vertikaalne transport. See on seotud liikmetega B^{uC} ja B^{vC}. Et need liikmed annavad tõepoolest vertikaalse voo divergentsi diskreetse vormi, järeldub samasusest

$$\frac{u_k^2}{2}\Delta a_k + u_k \overline{a\Delta u}^\eta = \Delta b_k,$$

kus

$$b_{k+1/2} = a_{k+1/2}u_k u_{k+1}$$

ning a rollis on u–komponendil $\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\lambda$ ja v komponendil $\overline{h_\lambda h_\theta m\dot{\eta}}^\theta$ (viimasel juhul tuleb muidugi u asendada toodud valemis v–ga).

Kineetilise energia horisontaalne transport. kirjeldub liikmetega B^{uA} ja B^{vA}. Kui neis avaldistes esimesele liikmele rakendada ositi diferentsimist (vt. viimane valem lk. 6), saame

$$\{i+1/2,j,k\}: \qquad B^{uA} = \delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda E) - B^{u*},$$

$$B^{u*} = -\overline{E\delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda)}^\lambda + \frac{u^2}{2}\left(\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\lambda + \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\lambda\right)$$

$$\{i,j+1/2,k\}: \qquad B^{vA} = \delta_\theta(v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta E) - B^{v*},$$

$$B^{v*} = -\overline{E\delta_\theta(v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta)}^\theta + \frac{v^2}{2}\left(\overline{\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u)}^\theta + \overline{\delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)}^\theta\right)$$

Siin esimesed liikmed on juba voo divergentsi vormis, liikmed B^{u*} ja B^{v*} aga kompenseeruvad (annavad nulli), kui valida kineetilise energia tihedus E vajalikus vormis. Selles on kerge veenduda, nihutades neid ekvivalntsusseost (*) kasutades raku tsentrisse

$$B^{u*} \doteq \left\{-E\delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda) + \frac{\overline{u^2}^\lambda}{2}\left(\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u) + \delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)\right)\right\}_{ijk}$$

$$B^{v*} \doteq \left\{-E\delta_\theta(v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta) + \frac{\overline{v^2}^\theta}{2}\left(\delta_\lambda(\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda u) + \delta_\theta(\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta v)\right)\right\}_{ijk}$$

Nende kahe avaldise liitmine annab samaselt nulli, kui valime

$$E = \frac{\overline{u^2}^\lambda}{2} + \frac{\overline{v^2}^\theta}{2} \ .$$

Nagu náha, erineb siintoodud kineetilise energia määrang HIRLAMi omast. Niisiis

$$B^{uA} \doteq \delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda E) \ , \qquad B^{vA} \doteq \delta_\theta(v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta E) \ .$$

Rõhujõudude töö. See kirjeldub $B^{u\varphi}$, $B^{v\varphi}$, B^{up} ja B^{vp} abil. Energiabilansi analüüsiks on siin tarvis appi võtta ka entalpiavõrrandi energialiige leheküljelt 16, kirjutades selle kujul

$$\{i,j,k\}: \quad (B^\omega) = \Delta(h_\theta h_\lambda b_k) + B^{pu} + B^{pv} - B^{\varphi u} - B^{\varphi v}$$

kus

$$B^{pu} = (RTh_\theta\Delta p)\overline{u\delta_\lambda(\ln p)}^\lambda \ , \quad B^{pv} = (RTh_\lambda\Delta p)\overline{v\delta_\theta(\ln p)}^\theta$$

$$B^{\varphi u} = (\varphi)\delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda) \ , \quad B^{\varphi v} = (\varphi)\delta_\theta(v\overline{h_\lambda \Delta p}^\theta) \ .$$

On näha, et $B^{up} \doteq B^{pu}$ ja $B^{vp} \doteq B^{pv}$, mistõttu need liikmed summeerimisel üle ala sisepunktide kompenseeruvad, mis vastab kineetilise energia ja entalpia vastastikusele tasakaalustatud transformatsioonile. Vastavad φ–liikmed aga teisenevad täisdivergentsideks. Nii näiteks võime esmalt rakendada ekvivalentsi

$$B^{\varphi u}_{ijk} \doteq \overline{\varphi\delta_\lambda(u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda)}^\lambda_{i+1/2,j,k}$$

mispeale lk. 5 toodud valemite abil järeldub

$$B^{\varphi u}_{ijk} + B^{u\varphi}_{i+1/2,j,k} \doteq \delta_\lambda(\overline{\varphi u\overline{h_\theta \Delta p}^\lambda}^\lambda)_{i+1/2,j,k} \ .$$

Analoogiline on tõestus vastavate v–liikmete jaoks.