III OSA

DISKREETSE MUDELI INTEGREERIMINE. EULERi ESITUS

Kui liikumisvõrrandid esitavad tendentid fikseeritud ruumipunktides:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{R}(x,t)$$

siis räägitakse et väljavõrrandid on antud *Euleri muutujates/esituses.* Kui võrrandid on antud kujul

$$\frac{\mathrm{d}u(x,t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{S}(x,t)$$

siis on tegu *Lagrange'i esitusega.* Evolutsioonivõrrandite ajaline integreerimine on erinev Euleri ja Lagrange'i esitustes. Levinum on Euleri esituse kasutamine. Aga Lagrange'i esitus on muutumas populaarseks ja võib Euleri esitusel baseeruvad integreerimisskeemid tulevikus välja tõrjuda. Selles peatükis vaatleme dünaamikavõrrandite ajalist integreerimist (tulevaste seisundite prognoosimist) Euleri muutjates.

§1. ILMUTATUD INTEGREERIMISSKEEMID

1.1. Lihtsaim ilmutatud skeem

Järgnevat skeemi kutsutakse ka Euleri skeemiks (aga tal ei ole mingit põhjuslikku seost eespoolräägitud Euleri esitusega).

Topeltvõrgu sõlmedes on antud prognostiliste muutujate tendentsid (terminoloogia järgib numbrilise meteoroloogia kõnepruuki). Näiteks kiiruse u–komponendi muutumiskiirus $\partial u/\partial t$ on antud sõlmedes $\{i+1/2, j, k\}$ võrranditega

$$\{i+1/2, j, k\}: \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{R}_u$$

kus $\mathcal{R}_u$ on u võrrandi parem pool. Suurust $\mathcal{R}_u$ nimetatakse *ilmutatud dünaamiliseks tendentsiks.* Ta on teadaolev suurus antud ajahetkel. Edaspidi vaatamegi muutujat u, kuigi räägitu on õige mistahes topeltvõrgu punkis antud mistahes evolutsioonilise muutuja kohta.

Ilmutatud skeem seab algväärtusele u^t vastavusse prognoositava välja samas punktis hetkel $t+\Delta t$

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \mathcal{R}_u^t \Delta t \ .$$

Prognoosiks on vaja teada hüdrodünaamilisi välju ühel ajatasemel $t = t^n = n\Delta t$. Selliseid prognoosimudelieid nimetatakse *ühe ajataseme e. ühetasemelisteks skeemideks.*

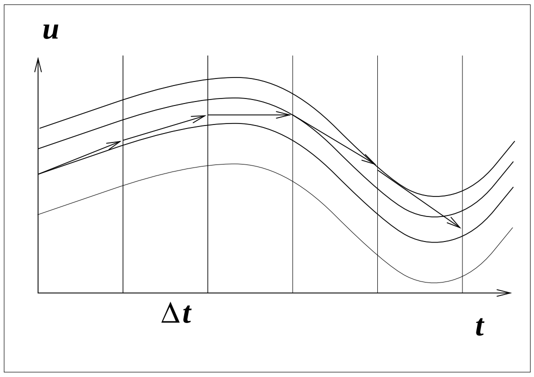

Fig. 1.

Integreerimine Euleri ilmutatud skeemiga. Skeemi täpsus on madal: Prognoositav kõver ei võta "kurve" korralikult ja libiseb naabertrajetooridele.

Tegu on esimest täpsusjärku skeemiga (tema viga $\sim \Delta t$, edaspidi: $\mathcal{O}(\Delta t)$). Miks ja kuidasmoodi viga kiiresti kasvab, on näha jooniselt 1.

1.2. Tsentreeritud ilmutatud skeem (Leapfrog)

Ilmutatud Euleri madal täpsus on tingitud sellest, et ta kasutab vaskpoolset diferentsi, lähendades

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^t \approx \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} \ .$$

Tunduvalt täpsema II j. skeemi täpsusega $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ saame, kui kasutame tsentreeritud diferentsskeemi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^t \approx \frac{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \ ,$$

mis toob arvutuseeskirjale

$$u^{t+\Delta t} = u^{t-\Delta t} + \mathcal{R}_u^t 2\Delta t \ . \tag{1}$$

Kui tähistada (HIRLAM Manual kasutab siin tähist $\overline{\delta_t u}^t$, aga kuna me ajaskaalas poolarvulisi tasemeid ei kasuta, siis võime ilma segadust kartmata defineerida tsentreeritud ajadiferentsi ilma igasuguste keskmistusteta siintoodud viisil), siis saab tsentreeritud ajadiferentsiga evolutsioonivõrrandi esitada ka kujul

$$\delta_t u = \mathcal{R}_u \ .$$

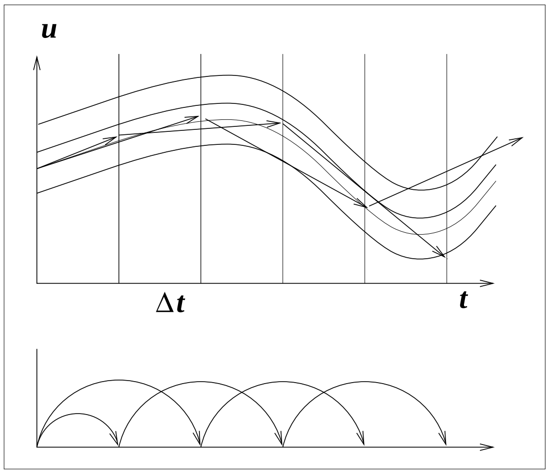

Fig. 2.

Integreerimine tsentreeritud skeemiga. Esimene samm tehakse Euleri meetodil. Edasi toimub prognoosimine "üle ühe" nagu näidatud alumisel joonisel. Tulemusena moodustub kaks murdjoonelist trajektoori, mis ei tohi aga teineteisest eemalduda. Et seda saavutada, kasutatakse täiendavat ajalist silumist.

Tegemist on kahetasemelise skeemiga: selleks et arvutada $u^{t+\Delta t}$, peab teadma nii lähteväärtust $u^{t-\Delta t}$ kui ka vaheväärtust u^t, mida on tarvis $\mathcal{R}_u^t$ arvutamiseks. Et saada alguses esimest vaheväärtust $u^{\Delta t}$, tuleb esimene samm teha ilmutatud Euleri skeemiga. Miks seda skeemi "konnahüppamiseks" (leapfrog) kutsutakse, on näha Joon. 2 alumiselt poolelt. Samuti on näha, et tegelikult moodustub antud skeemi korral kaks ligikaudu rööbitist kuid üldiselt sõltumatut trajektoori. Et need ei hajuks aja kasvades üksteisest eemale (nagu juhtub joonisel), kasutatakse tsentreeritud skeemi alati koos ajalise silumisega. Tüüpalgoritm on Roberti (1966) filtreerimisskeem (mida mõned nimetavad ka Asselini (1972) skeemiks), kus valemi (1) järgi leitud prognoosi ajatasemel u^t korrigeeritakse naabertasemete väärtuste $u^{t-\Delta t}$ ja $u^{t+\Delta t}$ abil, nii et tulemuseks on keskmistatud väärtus $\tilde{u}^t$:

$$\tilde{u}^t = u^t + \gamma \cdot (\tilde{u}^{t-\Delta t} + u^{t+\Delta t} - 2u^t)$$

Siin on osundatud ka asjaolule, et tegelikult kasutatakse Roberti skeemis korrigeeritud väärtust $\tilde{u}^{t-\Delta t}$ varasemalt ajatasemelt kuid korrigeerimata väärtust $u^{t+\Delta t}$ hilisemalt ajatasemelt. Silumisparameetri γ väärtus on reeglina väike: $\gamma = 0.05$. Praktikas on Roberti skeem ennast õigustanud ja annab reeglina väga head stabiliseerivat effekti ilma lahendit süstemaatiliselt moonutamata.

Kui suure Δt–ga tohib opereerida? Sellele küsimusele ammendava vastuse andmine on terve iseseisev kursus. Rusikareegel aga on antud *Courant–Friedrich–Lewi* (CFL) *stabiilsuskriteeriumiga*: Ajasamm peab olema igal juhul väiksem, kui kuluks kõige suurema kiirusega U liikuval materiaalsel punktil ühest sõlmest teise jõudmiseks, s.o. – võrgusammuga Δx võrdse vahemaa läbimiseks:

$$\Delta t < \Delta x / U \ .$$

HIRLAMi Eesti versiooni võrgusamm on 11 km. Kui maksimumkiirus oleks 50 m/s (tuul jugavoolu piirkonnas), saaksime

$$\Delta t < 220 s \ .$$

Nagu praktika näitab, on Euleri ilmutatud skeemi korral tegelik ajasamm, mille korral integreerimine annab mõistlikke tulemusi, siiski suurusjärk väiksem ja on umbes 5 – 10 sekundit. Tsentreeritud skeemi on rakendatud mudelis NHAD, ja kogemus on, et $\Delta t =$ 50 – 60 s on realistlik ülempiir antud U ja Δx korral, mis on umbes 3 – 4 korda väiksem kui CFL kriteerium lubaks. Põhjus on selles, et lisaks materiaalsele voolamisele on atmosfääris ergastatud ka ujulained, mis levivad horisontaalsuundades faasikiirustega ~ 100 (siselained) ja ~ 300 (rõhulained aluspinnal) m/s. Need suure kiirusega lained ei lase kasutada ilmutatud skeemides suuremat ajasammu kui 50 s.

§2. ILMUTAMATA TSENTREERITUD SKEEM

Ilmutamata tsentreeritud skeemi kutsutakse ka trapetsskeemiks. Miks, see selgub edaspidi.

Nagu juba märgitud, on tsentreeritud skeemi korral tegelik ajasamm umbes 4 korda väiksem kui CFL teoreetiline piir. Põhjus on selles, et pikema sammu korral hakkab eespoolkirjeldatud ilmutatud tsentreeritud skeem genereerima suure amplituudiga mittefüüsikalisi ujulaineid. Et ajasammu siiski suurendada, on tarvis see lainete genereerimine ellimineerida niimoodi, et horisontaalne advektsioon oleks võimalikult moonutustevaba. Seda saavutataksegi poolilmutatud skeemi abil.

2.1. Lihtne näide

Tegu on väga spetsiifilise ja olemuslikult numbriliste integreerimisvõtete arsenali kuuluva skeemiga, millel ei ole pidevat analoogi ja mis on väga üldine ja fundamentaalne diskreetsete skeemide stabiliseerimise võte. Seda demonstreerib järgmine lihne näide (pärit Hannu Savijärvi Numbrilise Meteoroloogia konspektist).

Vaatleme lihtsaimat võnkesüsteemi, mis kirjeldub võrrandiga

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\nu f \ , \tag{1}$$

kus $f(t)$ on otsitav protsessi amplituud. Selle lahend on

$$f(t) = \mathrm{e}^{i\nu t} \ .$$

Vaatame nüüd (järgides sõna–sõnalt Savijärve esitust) ilmutatud tsentreeritud skeemi:

$$\delta_t f = i\nu f \ ,$$

ehk

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t} = i\nu f(t) \ . \tag{2}$$

Kui otsime siin lahendit pideva juhuga analoogilise eksponendina

$$f(t) = \mathrm{e}^{i\nu_e t} = \mathrm{e}^{i\nu_e n\Delta t} = \beta^n \ , \tag{3}$$

kus

$$\beta = \mathrm{e}^{i\nu_e \Delta t} \ ,$$

saame β määramiseks

$$\beta - \beta^{-1} = 2i\nu\Delta t \ ,$$

mis toob võrrandile ν_e jaoks

$$\sin(\nu_e \Delta t) = \nu\Delta t \ .$$

See valem annab eeskirja efektiivse võnkesageduse ν_e leidmiseks ilmutatud skeemi (implicit leapfrog) puhul. Kehtib $\nu_e > \nu$, seega antud skeem suurendab võnkesagedust võrreldes täpse lahendiga. Lisaks kehtib kitsendus ajasammule

$$\nu\Delta t \leq 1 \ . \tag{4}$$

Kui see tingimus rikutakse, siis muutub ν_e kompleksseks, mis toob kaasa lahendi amplituudi plahvatusliku kasvu. Tegemist on CFL analoogiga ainult ajast sõltuval mudelil. Oletades, et f näol on tegemist funktsiooni $F(x,t)$ Fourier moodiga lainearvuga k:

$$F(x,t) = f(t)\mathrm{e}^{ikx} \ ,$$

saame sisse tuua selle harmoonilise laine faasikiiruse C seosega

$$\nu = Ck \ .$$

Nüüd on tingimus (4) kirjutatav kujul

$$\Delta t < \frac{1}{Ck} = \frac{L}{C}, \quad L = 1/k \ ,$$

kus $L \approx$ veerand lainepikkust. Niisiis, harmoonilistel lainetel tõepoolest on ilmutatud skeemi puhul ajasamm piiratud just CFL tingimusega. Et lainete faasikiirused keskkonnas võivad olla päris suured ka ujulainetel (~ 100 m/s), tuleb selliseid laineid sisaldavas süsteemis valida ilmutatud skeemi korral ajasamm vajalikult lühike.

Ilmutamata ehk trapetsskeem. See saadakse, kui keskmistatakse parem pool (1)–s (rakendatakse trapetsvalemit), nii et (2) asemel on skeem

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t} = i\nu \frac{f(t-\Delta t) + f(t+\Delta t)}{2} \ . \tag{5}$$

Standardtähistes on trapetsskeem

$$\delta_t f = i\nu \overline{f}^t \ .$$

Selline "pisike" muudatus paremas pooles ongi kogu ilmutamata skeemi spetsiifika. Kui otsime taas lahendit kujul (3), saame β jaoks võrrandi

$$\frac{\beta - \beta^{-1}}{\beta + \beta^{-1}} = i\nu\Delta t \ ,$$

mis toob võrrandile ν_e jaoks

$$\tan(\nu_e \Delta t) = \nu \Delta t \ . \tag{6}$$

Siin on erinevalt ilmutatud skeemist efektiivne võnkesagedus alati väiksem tegelikust, $\nu_e < \nu$, lisaks puudub igasugune ülapiir ajasammule Δt ja selle võib valida kuitahes suure. Seega, tegu on *tingimusteta stabiilse skeemiga (unconditionally stable scheme).* Äraseletatult vähendab trapetsskeem omavõnkesagedusi (seda enam, mida suurem on ajasamm) ja seal, kus on tegemist lainete genereerimise ja leviga, vähendab ta ka lainete levikiirust keskkonnas. Seega stabiilsus saavutatakse lainelevipildi suurte moonutuste hinnaga.

2.2. Mittehüdrostaatiline lainesüsteem.

Eelmine näide avas olu, aga detailide osas muidugi ei pakkunud midagi, mis kasvõi kaugeltki meenutaks ujulainetega seotud protsesse atmosfääris. Vaatan siin veidi lihtsustatud kuid tegelikkusele vastavat mudelit. Lihtsustus seisneb selles, et vaatan ühtlase aluspinna juhtu (ja edaspidi teen veel mõned lihtsustused, mis puudutavad termilist stratifikatsiooni). See võimaldab piirduda rõhukoordinaatidega ja oluliselt vähendada formaalsete detailide hulka mudelis. vastavad valemid on kirjas I osas lk. 12. Nüüd aga, et korraga uurida ka, kas ja mismoodi mittehüdrostaatilised effektid mõjutavad diskretiseerimisskeeme, vaatan mittehüdrostaatiliste liikmetega täiendatud p–ruumi mudelit. Tegu on nn. Miller Pearce"i (1974) mudeliga. Vastavad võrrandid on (tasaparalleelses atmosfääris horisontaalkoordinaatidega $\mathbf{x} = \{x, y\}$)

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g\left(1 + \frac{p}{RT}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) \ , \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla\varphi - f\mathbf{k}\times\mathbf{v} + \mathbf{F} \tag{1b}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{RT}{C_p}\frac{\omega}{p} + F_T \ , \tag{1c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial\omega}{\partial p} \ = \ 0 \ , \tag{1d}$$

$$\frac{w}{H} = -\frac{\omega}{p} \ . \tag{1e}$$

Siin $w = \dot{z}$ on tavaline vertikaalkiirus. Viimane võrrand (1e) on lähendvalem, mis seob selle p–ruumi tavakiirusega ω. See ja lisaks esimene võrrand (1a) on need võrrandid, mis on muutunud HS mudeliga võrreldes. (1a) on täpne vertikaalse liikumise võrrand

p-koordinaatides esitatuna ja läheb lõpmata väikeste vertikaalkiirenduste tingimustes üle tavapäraseks HS tasakaalu võrrandiks

$$1 + \frac{p}{RT}\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \ .$$

HS mudelist on üle võetud kokkusurumatustingmus (anelastsustingimus) (1d), mis on NH mudeli korral lähend, aga see lähend on piisavalt hea kogu mesoskaalapiirkonnas liikumise korisontaalmastaapidega $L_x > 300$ m, rääkimata sünoptilisest piirkonnast, kus ta ühtib täielikult tavalise p–ruumi HS mudeliga. Anelastsustingimus ellimineerib ka NH mudelis häälelained.

Ujulainete formeerumisel on kaasategev vaid osa süsteemist, selles protsessis löövad kaasa peaasjalikult horisontaaldivergents

$$d = \nabla \cdot \mathbf{v} \ ,$$

temperatuur, geopotentsiaal ja d–ga anelastsustingimuse (1d) kaudu jäigalt seotud vertikaalkiirus ω. Samal ajal horisontaalne pööris (vt. I osa, lk. 7)

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \ ,$$

mis on üheselt seotud horisontaalse voolamise kokkusurumatu (mittedivergentse) komponendiga, esimeses lähenduses ei osale ujulainete formeerumisel. Seetõttu on ujulainetega seotud alasüsteem võrrandeis (1) kergesti välja eraldatav ilma et seejuures oleks tarvis teha spetsiaalseid lihtsustusi. Eraldame kõigepealt välja advektiivsed liikmed (1)-s (st. läheme ajaliselt Lagrange'i esituselt Euleri esitusele):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \hat{a}w + g\left(1 + \frac{p}{RT}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) \ ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \hat{a}(\mathbf{v}) - \nabla\varphi - f\mathbf{k} \times \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T + T_i \frac{\omega}{p} + F_T \ ,$$

kus advektsioonioperaator on

$$\hat{a}(F) = -\mathbf{v} \cdot \nabla F - \omega \frac{\partial F}{\partial p} \ ,$$

ja nn. stabiilsustemperatuur (Rõõmu omavoliline termin) on

$$T_i = \frac{R}{C_p} T - p \frac{\partial T}{\partial p}$$

Nüüd rakendan teisele võrrandile horisontaalset divergentsioperaatorit. Siis saan – peale w ellimineerimist esimesest võrrandist (1e) abil ning d asendamist ω kaudu seosest (1d) – järgmise ujulaineid kirjeldava alasüsteemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{H\omega}{p} = \mathcal{R}_w - g \left(1 + \frac{p}{RT} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \ , \tag{2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial p} = \mathcal{R}_d + \nabla^2 \varphi \tag{2b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{R}_T + T_i \frac{\omega}{p} \ . \tag{2c}$$

Olen sisse toodud unifitseeritud tähised suurustele, mis on kas mittelineaarsed või sisaldavad väikesi liikmeid või/ja välisjõude

$$\mathcal{R}_w = -\hat{a}(w) \ , \quad \mathcal{R}_d = -\nabla \cdot (\hat{a}\mathbf{v} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} - \mathbf{F}) \ , \quad \mathcal{R}_T = -\mathbf{v} \cdot \nabla T + F_T \ .$$

Kõige olulisemaks kvaliteediks neil $\mathcal{R}$–liikmetel on, et nad vahetult ei osale laineprotsessis, vaid on esimeses lähenduses analoogilised etteantud välisjõududega, mis küll põhjustavad lainete teket, aga ise kaasa ei võngu. Kui vaadelda $\mathcal{R}$–liikmeid selles kontekstis, siis on (2) näol tegemist mittehomogeense võnkesüsteemiga, kus võnkumisi kutsuvad esile $\mathcal{R}$–liikmed.

Olgu öeldud, et selles mudelis on täielikust kirjeldusest puudu vaid üks võrrand – pöörisevõrrand ξ–le, mille tuletamine (1b)–st on analoogiline d–võrrandi tuletamisega. Kuna aga ξ, nagu öeldud, laineprotsessis ei osale, siis me seda võrrandit ei vaja. Aga siiki on huvipakkuv tähele panna, et täielik dünaamika koosneb kahest interakteeruvast alasüsteemist – horisontaalse liikumise allsüsteemist (kirjeldub ξ võrrandiga) ja lainesüsteemist, mis kirjeldub võrranditega (2).

Olgu ka märgitud, et kuigi ma kõnelen (2)–st kui ujulaineid kirjeldavast allsüsteemist, on tegu siiski palju üldisema mudeliga, mis haarab ka kogu nn. "puhta" konvektsiooni (tugev vertikaalne tsirkulatsioon, kus puudub täielikult mittedivergentne horisontaalne voolamine ja kogu horisontaalne vooluväli on gradientvoolamine).

Siiani on väide, et (2) on olemuselt võnkesüsteem, s.o. – laineid kirjeldav – vaid deklaratiivne olnud. Et seda ka tegelikult demonstreerida, teisendan teda veel. Selleks rakendan (2b)–le tuletist $\partial/\partial p$ ning ellimineerin paremalt $\partial\varphi/\partial p$ võrrandi (2a) abil. Peale mõningast liikmete ümbergrupeerimist on tulemuseks võrrand

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \frac{H^2}{p^2}\right) \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{R}{p}\nabla^2 T \;=\; \mathcal{R}_\omega \;, \tag{3}$$

kus

$$\mathcal{R}_\omega = \frac{\partial\mathcal{R}_d}{\partial p} + \nabla^2\left(\frac{H\mathcal{R}_w}{p} - \frac{H\omega}{p^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right) \;.$$

Olen siin viinud ajatuletist $\partial H/\partial t$ sisaldava liikme allikasse, kuna tegu on mittelineaarse häiritusliikmega, mis kõikide tunnuste järgi kuulub võnkeid esile kutsuvate mõjurite hulka, kuid mis ise vahetult võnkeprotsessis ei osale. Võrrandi (3) täiendamine temperatuurivõrrandiga (2c) annab kahest võrrandist koosneva (mittelineaarse) võnkesüsteemi, milles osalevad kaks välja: ω ja T.

Tähelepanuväärne on, et mudel (2c) – (3) sisaldab eneses (horisontaalselt) pikalainelisel piiril HS mudeli erijuhu. Selle saab, kui lasta (3) vasemal teine liige ja $\mathcal{R}_\omega$ viimane liige nulli minna, millele vastab formaalselt piirprotsess $H^2\nabla^2 \to 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{R}{p}\nabla^2 T \;=\; \mathcal{R}_\omega \;, \tag{3"}$$

kus

$$\mathcal{R}_\omega = \frac{\partial\mathcal{R}_d}{\partial p} + \nabla^2\left(\frac{H\mathcal{R}_w}{p}\right) \;.$$

Temperatuurivõrrand (2c) ei muutu HS piirkonda üleminekul üldse.

2.3. Ujulainete modelleerimine

Eelmise punkti võrranditel (2c) – (3) rajanev võnkesüsteem on täpne ja teda saab – pärast täiendamist ξ võrrandiga ja vajalike abiseostega – rakendada atmosfääridünaamika modelleerimisel ja ka ilmaennustuses, iseasi muidugi, kui sobiv ta on selleks tehniliselt (p koordinaadid ei ole head, kui on ebaühtlane aluspind, + muud võimalikud probleemid). Kuid üheks on see mudel küll väga sobiv: ujulainete vaatlemiseks ja erinevate ajaliste difskeemide võrdlemiseks.

Ujulaineid genereerivad **(a)** allikad $\mathcal{R}_T$ ja $\mathcal{R}_\omega$; **(b)** orograafia. Kõige lihtsamad "puhtad" lained saame, kui loeme ühtlase aluspinna kohal (seega orograafia effekt on välistatud) allikad nulliks (seega on välistatud ka jätkuv lainete genereerimine) ja lähendame (2c)–s T_i–d ja (3)–s H konstantidega. Vastav lähendmudel on

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_i \frac{\omega}{p} \ , \tag{1a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \frac{H^2}{p^2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{R}{p} \nabla^2 T \ = \ 0 \ . \tag{1b}$$

Mida selline lihtsustatud mudel kirjeldab? Ta kirjeldab vabu laineid ühtlase aluspinna kohal. See vastab mudelsituatsioonile, kus allikad genereerisid laineid ja siis mingist hetkest alates kadusid ära. Liikumine, mis sellest hetkest peale järele jääb, on võrranditega (1) kirjelduvate vabade lainete superpositsioon.

Vabad lained pideval juhul. Lihtsaim vaba ujulaine on harmooniline laine mille kuju on

$$T = T_0(p) \mathrm{e}^{i(\nu t - kx)} \ , \qquad \omega = \omega_0(p) \mathrm{e}^{i(\nu t - kx)}$$

Pannes need funktsioonid võrrandeisse (1), saame

$$i\nu T_0 = T_i \frac{\omega_0}{p} \ ,$$

$$i\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{k^2 H^2}{p^2} \right) \omega_0 - \frac{k^2 R}{p} T_0 \ = \ 0 \ .$$

Kui siit ellimineerida $T_0(p)$, saame võrrandi $\omega_0(p)$–le

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial p^2} + \left(\frac{k^2 C_i^2}{\nu^2} - k^2 H^2 \right) \frac{\omega_0}{p^2} \ = \ 0 \ .$$

Siin on $C_i^2 = RT_i$, $C_i \sim 100$ m/s on ujulainete levimise faasikiirus. Elementaarlahend esitub valemiga

$$\omega_0 = a p^{\alpha + 1/2} \ ,$$

amplituud a on suvaline konstant ning α määramiseks saame dispersioonivõrrandi

$$\alpha^2 - 1/4 + k^2 \left(\frac{C_i^2}{\nu^2} - H^2 \right) \ = \ 0 \ .$$

On kasulik lahendada see võnkesageduse ν suhtes:

$$\nu^2 = \frac{C_i^2 k^2}{1/4 - \alpha^2 + k^2 H^2} \tag{2}$$

see annab võnkesageduse dimensioonitu vertikaalse lainearvu α ja dimensioonitu horisontaalse lainearvu kH funktsioonina. HS piiri saame, kui loeme siin $kH \to 0$.

Vaatan nüüd võrrandite (1) diskreetset analoogi (ruumikoordinaatide järgi diskretiseerimist ei ole, küll aga ajas) ja rakendan **trapetsskeemi**. Süsteem (1) saab olema

$$\delta_t T = T_i \frac{\overline{\omega}^t}{p} \ , \tag{3a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \frac{H^2}{p^2}\right) \delta_t \omega + \frac{R}{p} \nabla^2 \overline{T}^t \ = \ 0 \ . \tag{3b}$$

Siin otsime lahendit analoogiliselt varasemate diskretiseeringutega ja pideva juhu proovilahenditega kujul

$$T = T_0(p) \mathrm{e}^{i(\nu_e n \Delta t - kx)} \ , \qquad \omega = \omega_0(p) \mathrm{e}^{i(\nu_e n \Delta t - kx)}$$

See toob võrranditele $T_0(p)$–le ja $\omega_0(p)$–le

$$\frac{\beta - \beta^{-1}}{2\Delta t} T_0 = T_i \frac{\omega_0}{2p} (\beta + \beta^{-1}) \ ,$$

$$\frac{\beta - \beta^{-1}}{2\Delta t} \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{k^2 H^2}{p^2}\right) \omega_0 - \frac{k^2 R}{2p} T_0 (\beta + \beta^{-1}) \ = \ 0 \ .$$

Kui siin ellimineerime T_0-i, saame pideva juhuga üsna analoogilise võrrandi

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial p^2} + \left(\frac{k^2 C_i^2}{b^2} - k^2 H^2\right) \frac{\omega_0}{p^2} \ = \ 0 \ ,$$

kus

$$b^2 = -\frac{1}{\Delta t^2} \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1} = \left(\frac{\tan \nu_e \Delta t}{\Delta t}\right)^2 \ .$$

Otsime taas lahendit kujul

$$\omega_0 = a p^{\alpha + 1/2} \ ,$$

siis saame dispersioonivalemi

$$b^2 = \nu^2 \ ,$$

kus ν on täpse (pideva juhu) omavõnkesagedus, mis esitub valemiga (2). Ilmutatud kujul annab see dispersioonivalem varasemaga (valem (6) punktis 2.1) ühtiva tulemuse

$$\tan(\nu_e \Delta t) = \nu \Delta t \ . \tag{4}$$

Vastavalt on kehtivad ka kõik punktis 2.1. formuleeritud tulemused skeemi püsivuse kohta.

Kogu keeruline füüsika (ja matemaatika), mille tõime sisse, et saada adekvaatsemat pilti ujulainetega seotud protsessidest, taandub dispersioonivalemite keeles asjaolule, et erinevalt elementaarsest võnkemudelist, mida vaatlesime p.-is 2.1., ei ole siin sagedus ν mitte lihtsalt etteantud konstant, vaid valemiga (2) arvutatav, lainearvudest sõltuv suurus.

On päris selge ka, et ilmutatud tsentreeritud ajaskeemi kasutamisel saaksime täpselt samasuguse kitsenduse ajasammule nagu valemiga (4) p. 2.1. antud piirang.

Üsna oluliseks tuleb hinnata ka tulemust, et mudeli hüdrostaatilisus või mittehüdrostaatilisus on üsna teisejärguline diskreetse skeemi stabiilsuse seisukohast. Ilmutamata skeem on ühtmoodi tingimusteta stabiilne nii HS kui NH korral, ainuke, mis veidi muutub, on ν sõltuvus lainearvudest.

Kommentaare. Trapetsskeemi algus numbrilises ilmaennustuses on Roberts et al., 1972 töös (kui uskuda Hoskins ja Simmonsi(1975) viitamist). Põhjaliku käsitluse andsid Hoskins ja Simmons (1975) ning Simmons ja Hoskins (1978) kelle ideid me oleme siinse materjali esitamisel laias laastus järginud. Detailides on siiski olnud küllalt suured erinevused, mis algavad sellest, et Hoskins ja Simmons kasutavad täielikult diskretiseeritud mudeleid ja viivad kogu analüüsi läbi numbriliselt.

Nemad on ka uurinud, milliseid halbu effekte võib põhjustada võrrandites (2.2.2c) ja (2.2.3) tegelike profiilide H ja T_i lähendamine mingite keskmiste foonisuurustega (millegipärast nad ei taha analoogilisi võrrandeid iteratiivselt lahendada täpsete profiilideni). Tulemus on, et kui foon erineb aktuaalsest palju, siis muutub ka ilmutamata skeem ebastabiilseks. Põhjus on selles, et foonile ja tegelikule profiilile vastavad omasagedused ν osutuvad liialt erinevaiks.

§3. EULERI POOLILMUTATUD SKEEM HIRLAMis

[Siin "Euler" rõhutab mitte ajalise diskretiseerimise vaid ruumilise esituse laadi].

Alljärgnevas on kirjeldatud poolilmutatud tsentreeritud ajaskeemi, mis on kasutusel hüdrostaatilises HIRLAMis. Termin "poolimutatud" tähendab seda, et osa liikmeid tendentsiavaldistes arvutatakse ilmutatud tsentreeritud (Leapfrog) skeemi kohaselt, osa aga ilmutamata (trapetsskeemi) järgides.

Põhimõtteliselt on tegu sellesama skeemiga, mida vaatlesime §2–s, kuid mida siin lahkame kogu nende "mittelineaarses ilus". Kui eelmises §–s ma teisendasin võrrandeid, et maksimaalselt välja tuua lainesüsteemi, siis HIRLAM-is katsutakse poolilmutatud skeem ehitada ilmutatud tsentreeritud skeemi laiendusena, nii et esilagse ilmutatud skeemi võrrandite struktuur maksimaalselt säiluks.

3.1. Lähtevõrrandid

Poolilmutatud skeemile ülemineku olemuseks on ujulainete formeerumisel osalevate jõudude keskmistamine. See puudutab liikumisvõrrandeid $\mathbf{v}$–le T–le ja ka aluspinna rõhule p_s (eelmises §-s ma oskasin asja nii kavalasti esitada, et aluspinna rõhu võrrand jäi välja; siiski osaleb ka p_s ujulainete – täpsemalt väliste ujulainete – formeerumisel ja tema võrrand on vajalik).

Esitame vajalikud võrrandid (vt. I osa, p 2.3, lk 16) kujul

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathcal{R}_v = \tilde{\mathcal{R}}_v - \mathcal{F}_v \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{R}_T = \tilde{\mathcal{R}}_T - \mathcal{F}_T \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial \ln p_s}{\partial t} = \mathcal{R}_{\ln p_s} = \tilde{\mathcal{R}}_{\ln p_s} - \mathcal{F}_{\ln p_s} \qquad (1c)$$

kus $\mathcal{R}$ on kogu füüsikaline tendents, $\tilde{\mathcal{R}}$ on see osa, mis on ujulainete genereerijana allika rollis ja $\mathcal{F}$ on need liikmed, mis vahetult laineprotsessis osalevad:

$$\tilde{\mathcal{R}}_v = -(f+\xi)\mathbf{k}\times\mathbf{v} - \dot{\eta}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} - \nabla E + \mathbf{F} \ , \qquad \tilde{\mathcal{R}}_T = -\mathbf{v}\cdot\nabla T + F_T \ , \qquad \tilde{\mathcal{R}}_{\ln p_s} = 0 \ ,$$

$$\mathcal{F}_v = \nabla\varphi + RT\ln p \ , \qquad \mathcal{F}_T = \dot\eta\frac{\partial T}{\partial\eta} - \frac{RT}{C_p}\frac{\omega}{p} \qquad \mathcal{F}_{\ln p_s} = -\frac{1}{p_s}\nabla\cdot\int_0^1 m\mathbf{v}d\eta \ .$$

[Miks HIRLAM skeem eelistab siin $\ln p_s$–i p_s–le, ma ei tea].

Süsteemi (1) poolilmutatud diferentsanaloog on (kirjutatud eelmise § eeskujudele toetudes)

$$\delta_t\mathbf{v} = \tilde{\mathcal{R}}_v^t - \overline{\mathcal{F}_v}^t \ ,$$

$$\delta_t T = \tilde{\mathcal{R}}_T^t - \overline{\mathcal{F}_T}^t \ ,$$

$$\delta_t \ln p_s = \tilde{\mathcal{R}}_{\ln p_s}^t - \overline{\mathcal{F}_{\ln p_s}}^t \ ,$$

ühesõnaga, allikaliikmed võetakse ilmutatult ajatasemel t, $\mathcal{F}$–liikmed aga lähendatakse ilmutamata trapetsvalemiga. Siit siis nimi "poolimutatud skeem".

See võrrandisüsteem on kirjutatav ekvivalentkujul

$$\delta_t\mathbf{v} = \mathcal{R}_v^t - (\overline{\mathcal{F}_v}^t - \mathcal{F}_v^t) \ , \qquad (2a)$$

$$\delta_t T = \mathcal{R}_T^t - (\overline{\mathcal{F}_T}^t - \mathcal{F}_T^t) \ , \qquad (2b)$$

$$\delta_t \ln p_s = \mathcal{R}_{\ln p_s}^t - (\overline{\mathcal{F}_{\ln p_s}}^t - \mathcal{F}_{\ln p_s}^t) \ . \qquad (2c)$$

Siin oleme taastanud tasemel t antud $\mathcal{F}$–liikmete liitmise ja lahutamisega füüsikalised tendentsid $\mathcal{R}^t$ täies ulatuses, nii nagu nende kuju ja arvutuseeskiri on ilmutatud skeemi puhul. See-eest on aga detsentreeritud $\mathcal{F}$–liikmetest maha lahutatud samade suuruste väärtused tasemel t. Sellise esituse eeliseks on, et ümarsulgudes olevaid jõudusid saab vaadata väikeste paranditena, ja nende arvutamisel on seetõttu lubatud lihtsustused.

3.2. F–liikmete lineariseerimine

Lihtsustused, mis võrrandite (2) ümarsulgudes olevates liikmetes tehakse, on lineariseerimine: need liikmed lähendatakse sobilikult valitud keskmise fooniseisundi suhtes lineariseeritud avaldistega. Keskmiseks fooniks on HIRLAMi puhul isotermiline, ilma veeauruta, ühtlase aluspinnaga ja ühtlase keskmise pinnarõhuga staatilises tasakaalus olev atmosfäär

$$T \approx T_r = 300K \ , \qquad p_s \approx p_r = 80000Pa \qquad R = R_d \ , \qquad C_p = C_{pd} \ .$$

Nii valitud p_s vastab pinnarõhule umbes 2 km kõrgusel platool.

Esimese võrrandi $\mathcal{F}$-liikme

$$(\overline{\mathcal{F}_v}^t - \mathcal{F}_v^t) = \overline{\nabla\varphi}^t - \nabla\varphi^t + \overline{RT\nabla\ln p}^t - RT^t\nabla\ln p^t$$

lineariseerimine käib nii, et T lähendatakse T_r–ga, gaaskonstant R kuiva õhu omaga R_d ja rõhulogaritm lähendatakse vastava avaldisega puhta σ–koordinaatesituse puhul:

$$\ln p \ \approx \ \ln(\eta p_s) \ .$$

See võimaldab kirjutada

$$(\overline{\mathcal{F}_v}^t - \mathcal{F}_v^t) \approx \nabla\left(\frac{1}{2}\Delta_{tt}P\right) \ ,$$

kus

$$P = \varphi + R_d T_r \ln p_s \ ,$$

ja

$$\Delta_{tt}X = X^{t-\Delta t} + X^{t+\Delta t} - 2X^t \ .$$

Kui kasutada diskretiseeritud esitust φ–le, ja jätta sellest välja aluspinda kirjeldav püsikomponent φ_s (mis Δ_{tt} rakendamisel kaob), saame abisuuruse P esitada

$$P = \hat{\gamma}T + R_d T_r \ln p_s \ ,$$

kus

$$(\hat{\gamma}T)_k = \alpha_k^r R_d T_k + R_d \sum_{j=k+1}^{Nlev} \Delta(\ln p)_j T_j \ .$$

Siin on lähtutud II osa p. 2.3 valemeist, kus on jälle pandud toime lineariseerimine, lugedes kõik suurused (α_k, R, Δp_k) peale temperatuuri T_k keskmisele foonile vastavaks.

Võrrandi (2b) ümarsulgudes olevat $\mathcal{F}_T$–d lähendatakse niimoodi

$$\mathcal{F}_T = \dot{\eta}\frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{RT}{C_p}\frac{\omega}{p} \approx -\frac{R_d T_r}{C_{pd}}\frac{\omega}{p} \ .$$

[Mina ei viskaks siin vertikaalse temperatuurigradiendiga liiget ära kuna see on lähend, mis kõige rohkem mõjutab ujulainete faasikiirust. Aga juba Hoskins ja Simmons (1978) märgivad, et soe isotermiline foon annab parema stabiliseerimise.]

Kasutades ω/p–le diskreetset esitust II osa lk. 11-lt:

$$\left(\frac{\omega}{p}\right)_k = -\frac{\Delta \ln p_k}{\Delta p_k}\sum_{k'=1}^{k-1}\nabla\cdot(\Delta p_{k'}\mathbf{v}_{k'}) - \frac{\alpha_k}{\Delta p_k}\nabla\cdot(\Delta p_k \mathbf{v}_k) \ + \mathbf{v}_k\cdot\nabla\ln p_k \ ,$$

$$\approx -\frac{\Delta \ln p_k^r}{\Delta p_k^r}\sum_{k'=1}^{k-1}\Delta p_{k'}^r d_{k'} - \alpha_k^r d_k$$

kus

$$d = \nabla\cdot\mathbf{v} \ ,$$

saame (2b) ümarsulgudes oleva osa lähendada avaldisega

$$\overline{\mathcal{F}_T}^t - \mathcal{F}_T^t \approx \hat{\tau}\left(\frac{1}{2}\Delta_{tt} d\right) \ ,$$

kus

$$(\hat{\tau} d)_k = \frac{R_d T_r}{C_{pd}}\left(\frac{\Delta \ln p_k^r}{\Delta p_k^r}\sum_{k'=1}^{k-1}\Delta p_{k'}^r d_{k'} + \alpha_k^r d_k\right)$$

Lõpuks, viimase võrrandi (2c) ümarsulgudes lähendan liiget $\mathcal{F}_{\ln p_s}$ järgnevalt:

$$\mathcal{F}_{\ln p_s} = -\frac{1}{p_s}\nabla\cdot\int_0^1 m\mathbf{v}d\eta \ \approx \ -\frac{1}{p^r}\nabla\cdot\int_0^1 m^r\mathbf{v}d\eta \ = -\frac{1}{p^r}\int_0^1 \ d\cdot m^r \ d\eta$$

mis diskretiseeritult annab

$$\mathcal{F}_{\ln p_s} \approx \ -\frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{Nlev}\Delta p_k^r \ d_k \ = -\hat{\nu} d \ .$$

See võimaldab (2c) parandusliikme kirjutada

$$\overline{\mathcal{F}_{\ln p_s}}^t - \mathcal{F}^t_{\ln p_s} \approx \hat{\nu}\frac{1}{2}\Delta_t d \ .$$

Niisiis, peale lähendamist on võrrandid (2) kujul

$$\delta_t \mathbf{v} = \mathcal{R}^t_v - \nabla\frac{1}{2}\Delta_{tt}P \ , \tag{3a}$$

$$\delta_t T = \mathcal{R}^t_T - \hat{\tau}\frac{1}{2}\Delta_{tt}d \ , \tag{3b}$$

$$\delta_t \ln p_s = \mathcal{R}^t_{\ln p_s} - \hat{\nu}\frac{1}{2}\Delta_{tt}d \ , \tag{3c}$$

kus

$$\Delta_{tt}X = X^{t-\Delta t} + X^{t+\Delta t} - 2X^t \ , \qquad P = \hat{\gamma}T + R_d T_r \ln p_s \ ,$$

$$(\hat{\gamma}T)_k = \alpha^r_k R_d T_k + R_d \sum_{j=k+1}^{Nlev} \Delta(\ln p)_j T_j \ ,$$

$$(\hat{\tau}d)_k = \frac{R_d T_r}{C_{pd}}\left(\frac{\Delta \ln p^r_k}{\Delta p^r_k}\sum_{k'=1}^{k-1}\Delta p^r_{k'} d_{k'} + \alpha^r_k d_k\right) \ ,$$

$$\hat{\nu}d \ = \frac{1}{p^r}\sum_{k=1}^{Nlev}\Delta p^r_k \ d_k \ .$$

3.3. Poolilmutatud süsteemi lahendamine

Pideval juhul käiks süsteemi (3) lahendamine järgmise standardskeemiga. (3a)–le rakendaksime div operatsiooni ja diferentseeriksime teda lisaks veel üks kord ajas. Paremal tekkiva ajatuletise $\delta_t P$ ellimineeriksime (3b) ja (3c) abil. Tulemuseks oleks võrrand d–le. kui see oleks lahendatud, siis teised suurused tuleks võrrandiest (3) ka kohe kätte. Diskreetsel juhul on lahenduskäik analoogiline, aga siin on ka omad nipid. Kõige olulisem on, et õnnestub vältida (3a) ajalist diferentseerimist (mis viiks kahe ajatasemega skeemilt 4-tasemelisele ja teeks asja õige keeruliseks).

Kirjutame algatuseks võrrandid (3) lahti:

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}^{t+\Delta t}_e - \Delta t\nabla(\Delta_{tt}P - \Delta^e_{tt}P) \ ,$$

$$T^{t+\Delta t} = T_e^{t+\Delta t} - \Delta t \hat{\tau} \Delta_{tt} d$$

$$\ln p_s^{t+\Delta t} = (\ln p_s^{t+\Delta t})_e - \Delta t \hat{\nu} \Delta_{tt} d \ ,$$

kus alaindeksiga e on tähistatud vastavate suuruste ilmutatud (explicit) prognoosid:

$$\mathbf{v}_e^{t+\Delta t} = \mathbf{v}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \mathcal{R}_v^t - \Delta t \nabla \Delta_{tt}^e P \ ,$$

$$T_e^{t+\Delta t} = T^{t-\Delta t} + 2\Delta t \mathcal{R}_T^t \ ,$$

$$(\ln p_s^{t+\Delta t})_e = (\ln p_s^{t-\Delta t}) + 2\Delta t \mathcal{R}_{\ln p_s}^t \ .$$

Kui T ja $\ln p_s$ võrrandeis on tõesti varasem asi lihtsalt teisel kujul ümber kirjutatud, siis $\mathbf{v}$ võrrandis on tehtud täiendavaid ümbergrupeerimisi uue suuruse $\Delta_{tt}^e P$ abil, mis on defineeritud nii:

$$\Delta_{tt}^e P = P_e^{t+\Delta t} + P^{t-\Delta t} - 2P^t$$

Sellest definitsioonist tulenevalt saab $\mathbf{v}$ võrrandi tuua kujule

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_e^{t+\Delta t} - \Delta t \nabla (P^{t+\Delta t} - P_e^{t+\Delta t}) \ .$$

Siin $P_e^{t+\Delta t}$ on P ilmutatud prognoos. P avaldisele ajalist tsentreeritud diferentsimist rakendades on kerge saada valem

$$P^{t+\Delta t} - P_e^{t+\Delta t} = -\Delta t \hat{G} \Delta_{tt} d \ , \qquad (*)$$

kus maatriksoperaator $\hat{G}$ on

$$\hat{G} = \hat{\gamma}\hat{\tau} + R_d T_r \hat{\nu} \ .$$

On tegelikult võimalik esitada ilmutatult ka $P_e^{t+\Delta t}$ avaldis, aga seda ei lähe vaja. Pannes (*) $\mathbf{v}$ võrrandisse, saame lõpliku valemi kiiruse prognoosimiseks:

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_e^{t+\Delta t} + (\Delta t)^2 \hat{G} \nabla \Delta_{tt} d \ . \qquad (4a)$$

Lisame siia ka teised kaks võrrandit:

$$T^{t+\Delta t} = T_e^{t+\Delta t} - \Delta t \hat{\tau} \Delta_{tt} d \qquad (4b)$$

$$\ln p_s^{t+\Delta t} = (\ln p_s^{t+\Delta t})_e - \Delta t \hat{\nu} \Delta_{tt} d \ , \tag{4c}$$

See prognoosisüsteem sisaldab aga (seni veel tundmatut) suurust $\Delta_{tt} d$.

3.4. Helmholtzi võrrand divergentsile

Suuruse $\Delta_{tt} d$ määramiseks rakendame võrrandile (4a) divergentsi:

$$d^{t+\Delta t} = d_e^{t+\Delta t} + (\Delta t)^2 \hat{G} \nabla^2 \Delta_{tt} d \ ,$$

kus

$$d_e^{t+\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{v}_e^{t+\Delta t} \ .$$

See võrrand on esitatav kujul

$$X - (\Delta t)^2 \hat{G} \nabla^2 X = X_e \tag{5}$$

kus

$$X = \Delta_{tt} d \ , \quad X_e = \Delta_{tt}^e d = d_e^{t+\Delta t} + d^{t-\Delta t} - 2d^t \ .$$

Saadud võrrand on Helmholtzi võrrand X–le. See võrrand tuleb igal ajasammul lahendada ja seejärel leida võrrandeist (4) lõplikud prognoosiväärtused $\mathbf{v}^{t+\Delta t}$, $T^{t+\Delta t}$ ja $\ln p_s^{t+\Delta t}$.

Võrrandi (5) lahendamine on üsna standardne, ja on kirjeldatud Manualis.