

**DISKREETSE MUDELI INTEGREERIMINE LAGRANGE’i ESITUSES**

HIRLAMIS on paralleelselt Euleri poolimutatud ajaskeemiga kasutusel ka Lagrange’i ajaskeem, mida selle autorid McDonald ja Haugen nimetavad *kahe(aja)tasemeliseks poolilmutatud poollagraanži skeemiks (two time level, semi-Lagrangian, semi-implicit model)*. See ei ole aga (kahjuks) HIRLAM Manualis kirjas vaid eraldi tehnilise aruan- dena (McDonald, 1995). Materjal ise on väga kenasti esitatud Haugeni ja McDonaldi (edaspidi MH) 1992 ja 1993. a töödes, millele selle peatüki materjal suuresti toetub.

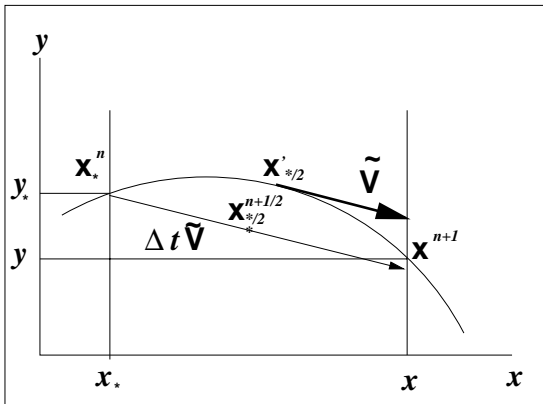
**§1. ÜLDISED IDEED**

**1.1. Evolutsioonivõrrandi integreerimine Lagrange’i muutujates**

Küllalt üldine Lagrange’i esitus välja  $\psi$  evolutsioonivõrrandile on (lihtsuse mõttes vaatlen kahemõõtmelist geometriat kohavektoriga  $\mathbf{x} = \{x, y\}$ )

$$\frac{d\psi(\mathbf{x}, t)}{dt} = L(\mathbf{x}, t) + N(\mathbf{x}, t) , \tag{1}$$

kus vasakul on välja materiaalne tuletis ja paremal on sunnifunktsioon, mis on jagatud lineaarseks  $L$  ja mittelineaarseks  $N$  komponendiks. Erijuhul, kui  $\psi$  on kiirus, on sunni- funktsiooniks osakesele mõjuv jõud massiühiku kohta. Kuid see üldine esitus kehtib ka kõigi teiste väljade puhul, näiteks võib  $\psi$  rollis olla hübriidruumi tihedus  $m$ .



**Joon. 1.**

Trajektoirilõik, mida mööda arvuta- takse integraal. Alguspunkti  $x_*$  ligi- kaudne hindamine.  $x_{*/2}$  on vahepunkt trajektoiril, mis esimeses lähenduses loetakse asuvat alg- ja lõpp-punkti ühen- dava sirge keskpunktis.

Jutt tuleb võrrandi (1) integreerimisest ühe ajasammu  $\Delta t$  ulatuses. Olgu hetkel

$t_n = n\Delta t$  materiaalse osakese algasend  $\mathbf{x}_*^n$  ja saabugu ta hetkeks  $t_{n+1}$  punkti  $\mathbf{x}^{n+1}$  (Joon. 1). Lagrange'i skeemis on lõpp-punktiks  $\mathbf{x}^{n+1}$  teadaolev (etteantud) punkt, diskreetse mudeli korral on selleks suvaline elementaarse ainekuubi tsepter  $\mathbf{x}_{ij}$ .

Algpunkti  $\mathbf{x}_*^n$  asendit hinnatakse diferentsvalemiga "ülesvoolu" liikudes:

$$\mathbf{x}_*^n = \mathbf{x}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}\Delta t , \quad (2)$$

kus  $\tilde{\mathbf{v}}$  on mingis trajektoirilõigu vahepunktis arvatud kiirusväli.  $\tilde{\mathbf{v}}$  hindamisel peatume eraldi allpool.

Võrrandi (1) integreerimine ajalõigul  $[t_n, t_{n+1}]$  tähendab parema poole integreerimist piki trajektoori liikivas osakeses ja on kirja pandav kujul

$$\psi^{n+1} - \psi_*^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{L[\mathbf{x}(t'), t'] + N[\mathbf{x}(t'), t']\} dt' , \quad (3)$$

kus välja algväärtus on

$$\psi_*^n = \psi(\mathbf{x}_*, t^n) .$$

Kuna  $\mathbf{x}_*$  ei ole võrgu sõlmpunkt, tuleb välja algväärtus  $\psi_*^n$  leida interpoolimisega. Avaldise (3) paremal olev integraal lähendatakse mingi lihtsa kvadratuuriga.

**Ilmutatud tsentreeritud skeemi** saame, kui võtame integraali ligikaudseks väärtuseks integrandi kaalutud väärtuse trajektoori vahepunktis  $\mathbf{x}_{*/2}$ :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \{L[\mathbf{x}(t'), t'] + N[\mathbf{x}(t'), t']\} dt' = \Delta t \{L[\mathbf{x}_{*/2}, t^{n+1/2}] + N[\mathbf{x}_{*/2}, t^{n+1/2}]\} \equiv \Delta t (L_{*/2}^{n+1/2} + N_{*/2}^{n+1/2}) . \quad (4)$$

Vahekoordinaat  $\mathbf{x}_{*/2}$  vastab pooltasemele  $t_{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$ . Kui  $\tilde{\mathbf{v}}$  on mingil viisil hinnatud, siis saab vahekoordinaadi arvutada valemist

$$\mathbf{x}_{*/2} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{v}}\Delta t/2 . \quad (5)$$

See skeem eeldab niisiis, et

- (1) oskame arvutada  $\tilde{\mathbf{v}}-d$ ;
- (2) lisaks ajatasemele  $t_n$  on väljad  $L$  ja  $N$  eelnevalt teada ka pooltaseme  $t_{n+1/2}$  korral\*.
- (3) meil on head interpolatsioonivalemid  $\psi^n$  arvutamiseks punktis  $\mathbf{x}_*$ , ja  $L_{*/2}^{n+1/2}$  ning  $N_{*/2}^{n+1/2}$  interpoolimiseks punkti  $\mathbf{x}_{*/2}$ .

Ilmutatud tsentreeritud approksimatsiooni (4) tegelikult kasutataksegi, kuid ainult mittelineaarsete liikmete  $N$  integraalide hindamisel:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} N[\mathbf{x}(t'), t'] dt' \approx \Delta t N_{*/2}^{n+1/2}. \quad (6)$$

Autorid MH nimetavad seda *Ilmutatud tsentreeritud Lagrange'i skeem (1)*). Põhjus, miks mittelineaarsed liikmed kannatavad ilmutatud skeemi kasutamist, on samad, mis Euleri esituse puhul: nad on väikesed ja ei osale vahetult lainetusprotsessides. Seepärast on nende puhul ilmutatud skeem töövõimeline. Ja seal, kus nad muutuvad suurteks – väga järsu orograafiaga piirkonnad näiteks – on nende puhul võimalik ka ebastabiilsus, kui ajasamm on valitud piisavalt suur. Põhjus, miks nende puhul tahetakse ilmutatud skeemi rakendada on aga selles, et poolilmutatud või ilmutamata skeemi ei oskaks keegi lahendada, või oleks see piisavalt keeruline töö.

**Ilmutamata tsentreeritud skeemi** saame, kui võtame integraali ligikaudseks väärtuseks trajektoori otspunktides  $\mathbf{x}_*$  ja  $\mathbf{x}$  arvutatud integrandi väärtuste kaalutud keskmise

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \{L[\mathbf{x}(t'), t'] + N[\mathbf{x}(t'), t']\} dt' \approx \frac{\Delta t}{2} (L_*^n + N_*^n + L^{n+1} + N^{n+1}).$$

Nagu juba öeldud, mittelineaarsete liikmete korral ei kasutata ilmutamata skeemi. Küll tehakse seda aga lineaarsete puhul. Lineaarsete liikmete  $L$  korral toob ilmutatud skeem pikkade ajasammude kasutamisel CFL tingimuse rikkumisele. Seepärast kasutatakse nende puhul ilmutatamata skeemi:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} L[\mathbf{x}(t'), t'] dt' \approx \frac{\Delta t}{2} (L^{n+1} + L_*^n). \quad (7)$$

---

\* Kui siin kasutada "Leapfrog" meetodit, saaksime kahetasemelise skeemi ajasammuga  $\Delta t/2$ . See on üks võimalik integreemisskeem, mida aga HIRLAM ei kasuta.

Kokku on niisiis taas tegemist poolilmutatud skeemiga, kus lineaarne osa arvutatakse ilmutamata, mittelineaarne osa – ilmutatud skeemiga:

$$\psi^{n+1} - \psi_*^n = \frac{\Delta t}{2}(L^{n+1} + L_*^n) + \Delta t N_{*/2}^{n+1/2},$$

mille saab kirjutada ka kujul

$$\psi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}L^{n+1} = \left( \psi^n - \frac{\Delta t}{2}L^n \right)_* + \Delta t N_{*/2}^{n+1/2}. \quad (8)$$

Siin vasem pool sisaldab ainult  $\psi^{n+1}$ -i (lineaarne liige  $L^{n+1}$  saab sõltuda definitsiooni kohaselt sõltuda vaid  $\psi^{n+1}$ -st), paremal olevad avaldised on leitavad interpoolimistega ajatasemetel  $t^n$  ja  $t^{n+1/2}$ . Seega, tarvilik on kaks interpoolimist igal sammul. See on põhjus, miks MH pakuvad kasutamiseks ka *Ilmutatud tsentreeritud Lagrange'i skeemi* (2). See seisneb valemi (6) (ehk valemi (8) viimase liikme) edasises lähendamises:

$$\Delta t N_{*/2}^{n+1/2} == \frac{\Delta t}{2} \left( N^{n+1/2} + N_*^{n+1/2} \right), \quad (9)$$

s.o., mittelineaarse liikme väärtus trajektoori keskpunktis ajatasemel  $t^{n+1/2}$  asendatakse samal ajatasemel arvutatud otspunktide väärtuste keskmisega. Poolilmutatud skeem saab nüüd olema

$$\psi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}L^{n+1} = \left( \psi^n - \frac{\Delta t}{2}L^n + \frac{\Delta t}{2}N^{n+1/2} \right)_* + \frac{\Delta t}{2}N^{n+1/2}. \quad (8')$$

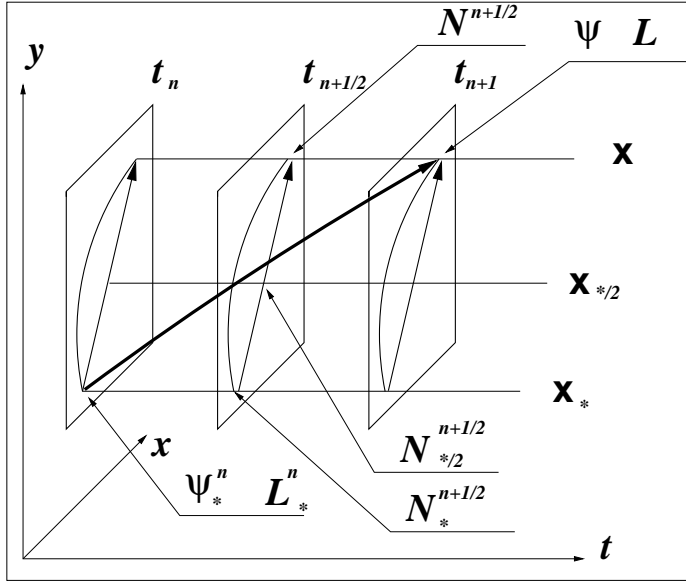
Nagu näeme, on siin tõesti tarvilik interpoolimine ainult ühes punktis  $\mathbf{x}_*$ .

Lõpuks, suvalise välja  $F$  võrgu punktides antud väärtuste arvutamiseks pooltasemel  $t^{n+1/2}$  kasutavad MH ekstrapoolimist tasemetelt  $n$  ja  $n - 1$ :

$$F^{n+1/2} = \frac{3F^n - F^{n-1}}{2}. \quad (10)$$

(See skeem on analoogiline nn. modifitseeritud Euleri meetodiga, e. Adams–Brathworth'i meetodiga). Seega pooltasemed on nende skeemis vaid abitasemed. Nagu näeme on tegemist kahetasemelise skeemiga: prognoosiks tasemele  $n + 1$  on vaja teada nii taseme  $n$  kui  $n - 1$  välju. Aga see ei ole (10) kasutamise tõttu mitte klassikaline tsentreeritud skeem ("Leapfrog"), vaid erinev meetod. [Aga Robert - Asselini filtrit rakendatakse lineaarsete liikmete silumisel ikkagi nagu ilmutatus skeemi korralgi.]

## Joon. 2.



Trajektoorilõik aegruumis (jäme kõverjoon) ja sellele vastav ruumiline trajektoorilõik peenema joonega (üks ja seesama kõigil kolmel ajalõikel). On näidatud, millistele aegruumi punktidele vastavad tekstis defineeritud funktsioonide sõlmväärtused.

Mismoodi defineeritud suurused on paigutatud aegruumi punktides, näitab Joon. 2.

Ja üldise jutu lõpetuseks veel üks modifikatsioon, mis suurendab skeemi stabiilsust. Selle modifikatsiooni on pakkunud kasutusse Tanguay et al. (1992) ja ta seisneb valemis(8') algpunktis arvutatud juurdekasvude kaalu vähendamises ja lõpp-punktis arvutatud juurdekasvude kaalu proportsionaalses suurendamises:

$$\psi^{n+1} - \frac{\Delta t_+}{2} L^{n+1} = \left( \psi^n - \frac{\Delta t_-}{2} L^n + \frac{\Delta t_-}{2} N^{n+1/2} \right)_* + \frac{\Delta t_+}{2} N^{n+1/2} \quad (8'')$$

kus

$$\Delta t_{\pm} = (1 \pm \varepsilon) \Delta t ,$$

ja  $\varepsilon$  on väike parand. Tüüpväärtus on sellel parameetril 0.05.

### 1.2. Vahekiiruse hindamine

Selleks, et kirjeldatud skeemi kasutada saaksime, on tarvis teada vahekiirust  $\tilde{\mathbf{v}}$  valemities (2) ja (5). Trajektoori lõpp-punkti  $\mathbf{x}^{n+1}$  arvutamiseks alguspunktist  $\mathbf{x}_*^n$  kehtib üldine valem (3):

$$\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}_*^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}[\mathbf{x}(t'), t'] dt' .$$

Hinnataes siin integraali kaalutud keskmisega, saame

$$\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}_*^n = \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}_{*/2}, t_{n+1/2}) .$$

Kui kasutada valemeid (2) ja (5), saab selle kirjutada kujul

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}^{n+1} - \Delta t/2\tilde{\mathbf{v}}, t_{n+1/2}) . \quad (11)$$

Kiirusvälja  $\mathbf{v}$  arvutamiseks pooltasemel  $t_{n+1/2}$  kasutatakse valemit (10). Seega, kiirusväli  $\mathbf{v}$  pooltasemel  $t_{n+1/2}$  on teada ning teada (ette antud) on ka lõpp-punkt  $\mathbf{x}^{n+1}$ . Seepärast on siin tegu võrrandiga vahekiirusele  $\tilde{\mathbf{v}}$ . See võrrand lahendatakse iteratiivselt:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(m+1)} = \mathbf{v}(\mathbf{x}^{n+1} - \Delta t/2\tilde{\mathbf{v}}^{(m)}, t_{n+1/2}) , \quad (11')$$

kasutades alglähendina  $\tilde{\mathbf{v}}^{(0)} = 0$ . Kuna väli  $\mathbf{v}^{n+1/2}$  on antud numbriliselt võrgupunktides, saab seda võrrandit lahendada vaid numbrilist interpoleerimist kasutades. Kogu Lagrange'i skeemi ulatuses kasutatakse HIRLAMis kuupinterpoleerimist, kuna lineaarne ei anna vajalikku täpsust ja ruutinterpoolimine ei sobi sümmeetriakaalutlustel.

### Lõpetuseks.

Veel tasub tähele panna, et trajektoori mõiste eeldab vahvälja  $\mathbf{v}^{n+1/2}$  komponentide andmist samas ruumipunktis, seepärast kasutatakse tema puhul keskmistamist poolindeksitega sõlmedest (elementaarkuubi tahkudelt) täisarvuliste indeksitega sõlmedesse (kuubi tsesstrisse):

$$\mathbf{v}_{ij}^{n+1/2} = \overline{\mathbf{i}u^{n+1/2}}_{ij}^x + \overline{\mathbf{j}v^{n+1/2}}_{ij}^y$$

Kiirusvälja pooltaseme hinnang  $\tilde{\mathbf{v}}$  leitakse (vt. joon.1) algus ja lõpp-punkti ühendaval sirgel, seega ei arvestata trajektoori kõverdumist. Siin võib olla veel ruumi edasisteks täpsutusteks.

Siinkirjeldatud kahemõõtmeline skeem laieneb väga otse ja muutusteta komemõõtmeliseks.

Ilmutamata lineaarete liikmete puhul kasutatakse täpselt sama lineariseerimise tehnikat, nagu Euleri skeemi puhulgi ja ka tulemuseks on täiesti analoogiline Helmholtzi võrrand horisontaalsele divergentsile.

Kirjeldatud Lagrange'i skeem ei säilita massi ja energiat. Siiski on numbriline skeem piisavalt täpne, nii et nende suuruste mittejäävus ei ole 1 - 2-päevase prognoosi korral veel oluline ja ohtlik. Tanguai kaasautoritega on minu andmetel saanud ka massikonserveerivaid skeeme.